Wo stehen wir?

① homogene Koordinaten für $\mathbb{RP}^2$

$\mathcal{P}$ Punkte repräsentiert durch Vektoren $\mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\mathcal{L}$ Geraden " " " $\mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

② Projektive Transformationen

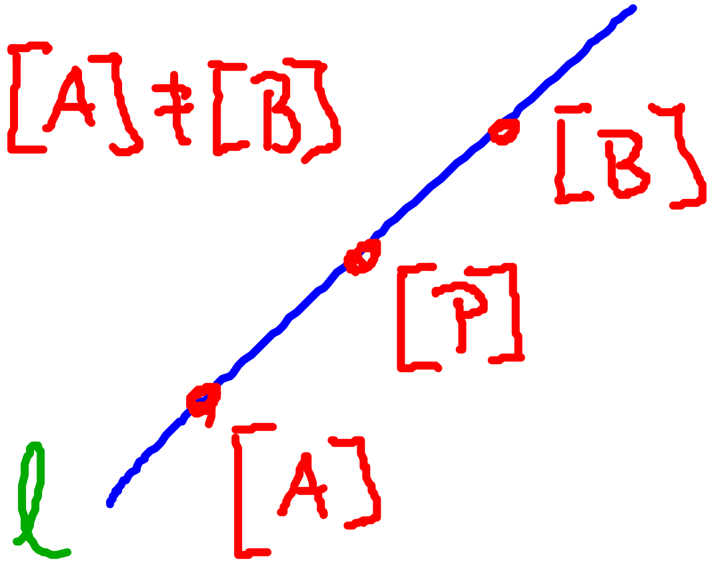
Punkte $p \mapsto M \cdot p$

Gerade $\ell \mapsto (M^T)^{-1} \ell$

③ Dualität

Begriffliche Symmetrie zw. Punkten und Geraden

④ Projektive Geometrie auf einer Geraden (und Doppelverhältnisse)



Alle Punkte auf der Verbindungsgerade von [A] und [B] sind genau die als $[\lambda A + \mu B]$ darstellbaren Punkte mit $\lambda \neq 0$ oder $\mu \neq 0$.

<u>Bew</u> (i) „$[\lambda A + \mu B]$ liegt auf ℓ"

$$\det(A, B, \lambda A + \mu B) = \lambda \cdot \underbrace{\det(A,B,A)}_{=0} + \mu \underbrace{\det(A,B,B)}_{=0} = 0$$

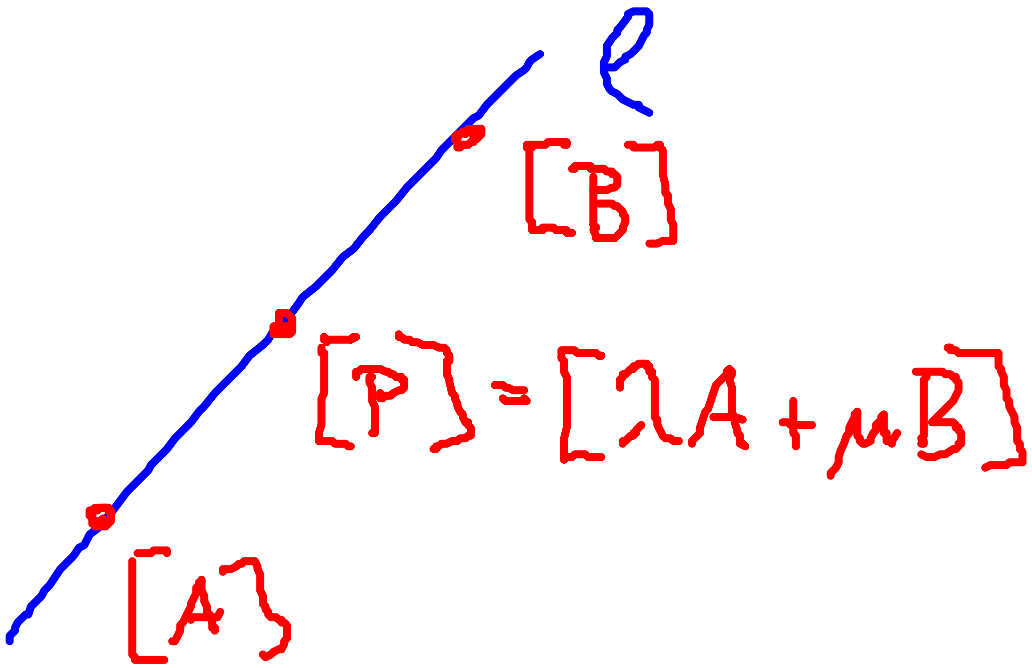
(ii) „Punkt $[P]$ auf ℓ hat die Form $[\lambda A + \mu B]$"

A, B, P kollinear $\Rightarrow \exists\, \ell \neq 0$ mit $\langle A, \ell\rangle = \langle B, \ell\rangle = \langle P, \ell\rangle = 0$

$$\begin{pmatrix} - A - \\ - B - \\ - P - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \ell \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

| wg $[A] \neq [B]$ ist P Linearkomb. von A und B

$$P = \lambda A + \mu B$$



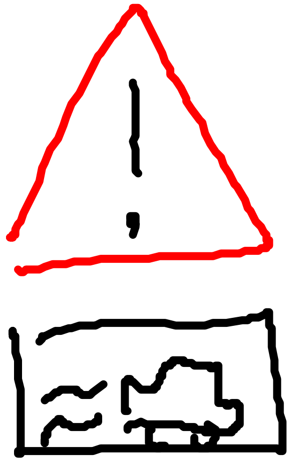
$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ homogene Koordinaten für $[P]$ auf ℓ bezügl. der Basis A, B

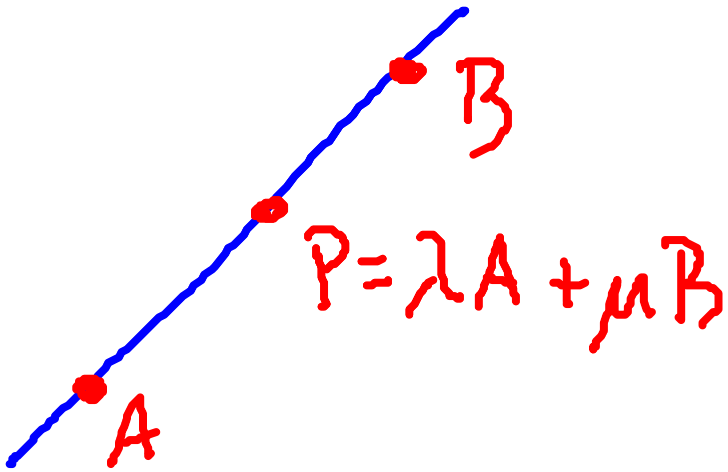
Skalare Vielfache von $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ repräsentieren den gleichen Punkt.

Insbesondere

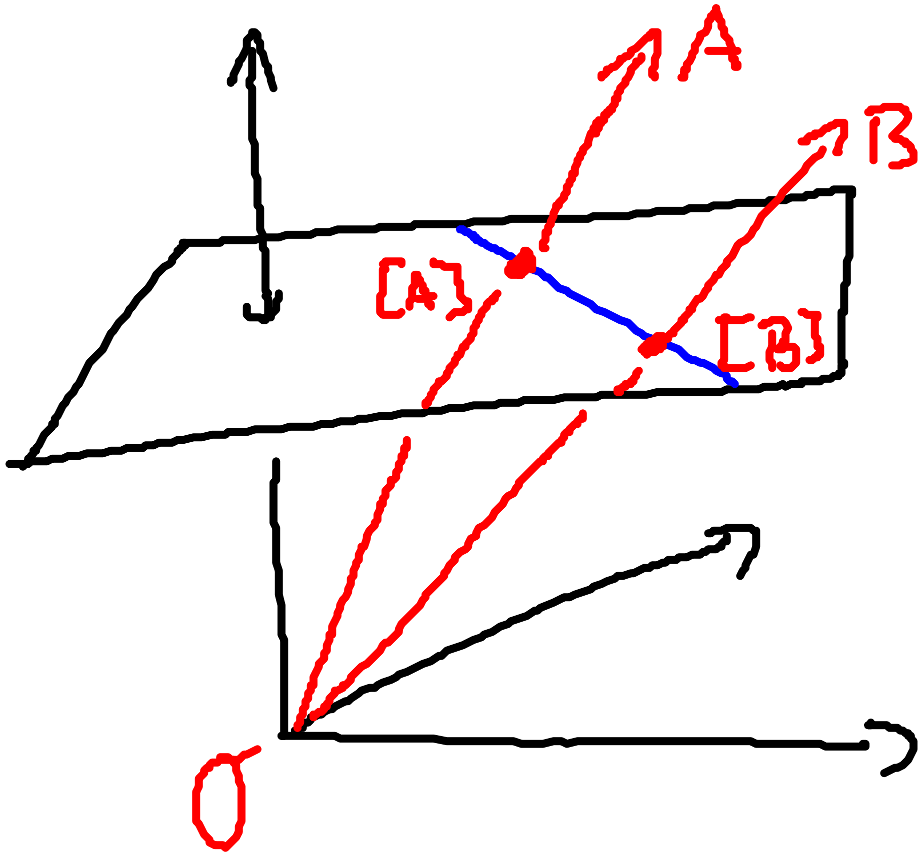
$$[A] \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [B] \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Achtung subtil

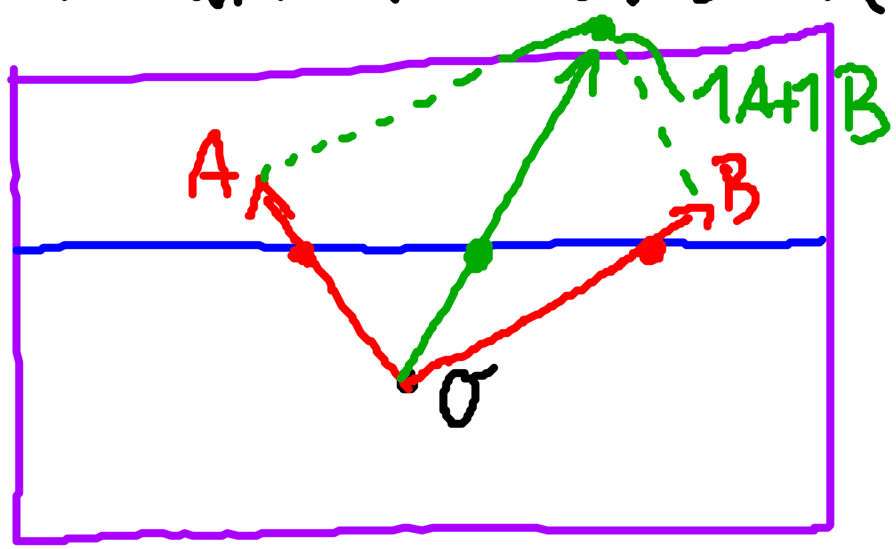




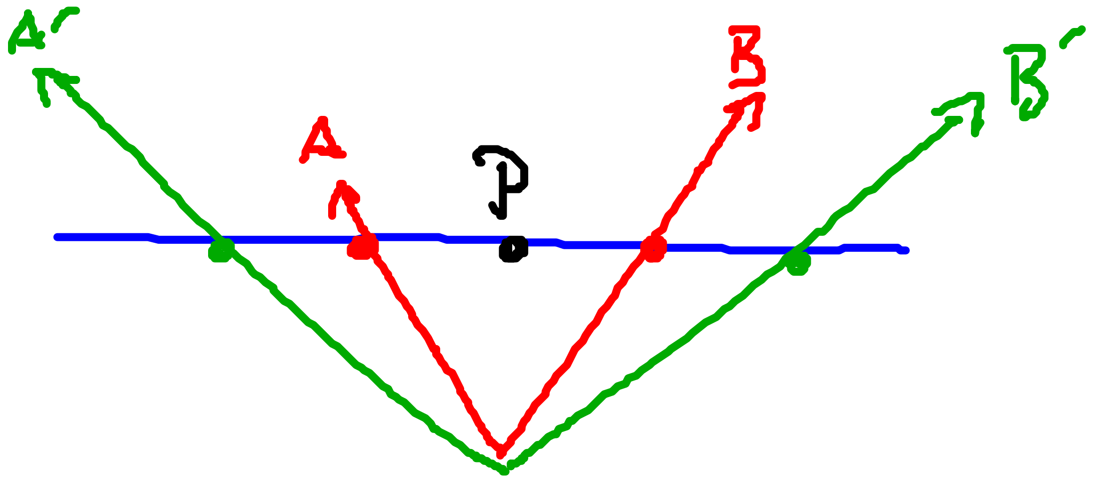
Die genaue Position von P hängt von den Repräsentanten A, B ab nicht nur von den Punkten [A], [B]



Situation in der Ebene O, A, B



Skalieren von A und B verschiebt die Position von $[\lambda A+\mu B]$



$$P = \lambda A + \mu B$$

$$P = \lambda' A' + \mu' B'$$

$$A' = \lambda_A A + \mu_A B$$

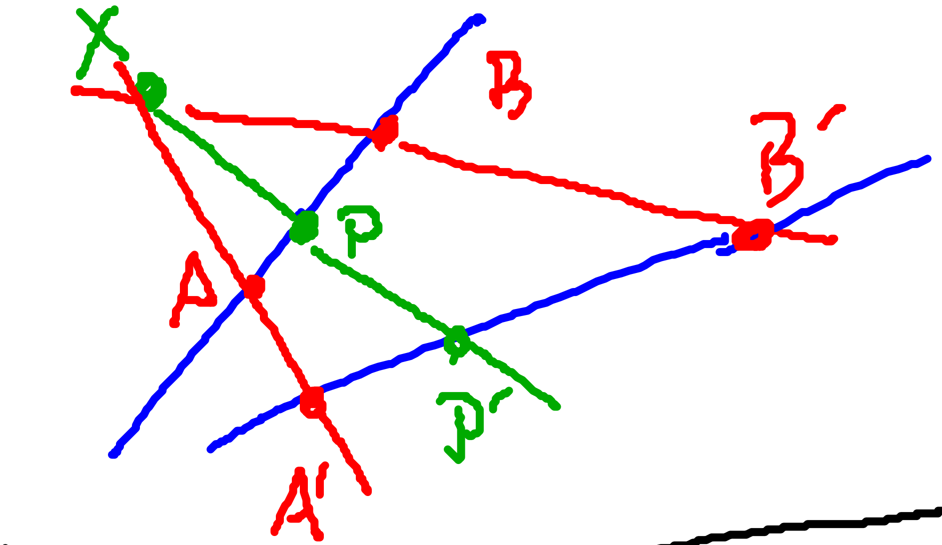
$$B' = \lambda_B A + \mu_B B$$

$$\begin{aligned}
P &= \lambda' A' + \mu' B' \\
&= \lambda' (\lambda_A A + \mu_A B) + \mu' (\lambda_B A + \mu_B B) \\
&= \underbrace{(\lambda' \lambda_A + \mu' \lambda_B)}_{\lambda} A + \underbrace{(\lambda' \mu_A + \mu' \mu_B)}_{\mu} B
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_A & \lambda_B \\ \mu_A & \mu_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} \right\}$$

Projektive Transformation der Punkte auf ℓ

Projektion in $\mathbb{RP}^2$ von einer Geraden auf eine andere



$$P=\lambda A+\mu B$$
$$P'=\lambda' A'+\mu' B'$$

Frage: wie hängt $\begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$ ab.

Satz Es gibt $\tau\in\mathbb{R}$ so daß man
$$\begin{pmatrix}\lambda'\\ \mu'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$
hat.

Bew Zeige: „Es gibt eine Wahl für τ, so dass $P\times P'$ mit X inzident ist."

$$0=\langle P\times P', X\rangle=\langle(\lambda A+\mu B)\times(\lambda' A'+\mu' B'), X\rangle$$

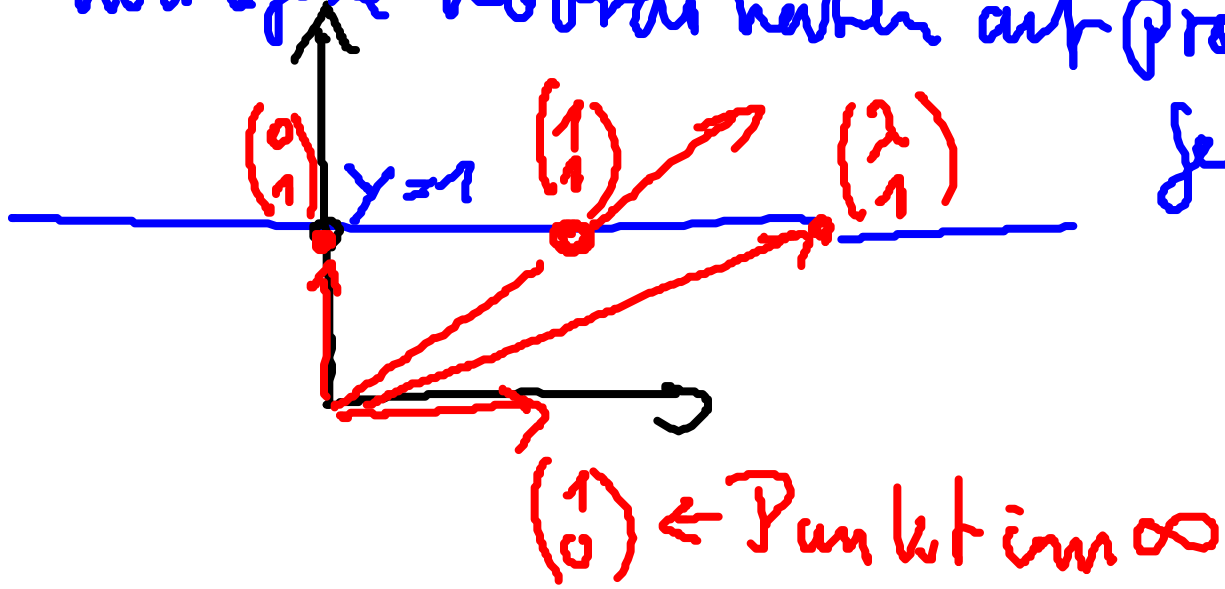
$$=\underbrace{\langle\lambda\lambda'(A\times A'), X\rangle}_{=0}+\langle\lambda\mu'(A\times B'), X\rangle+\langle\mu\lambda'(B\times A'), X\rangle+\underbrace{\langle\mu\mu'(B\times B'), X\rangle}_{=0}$$

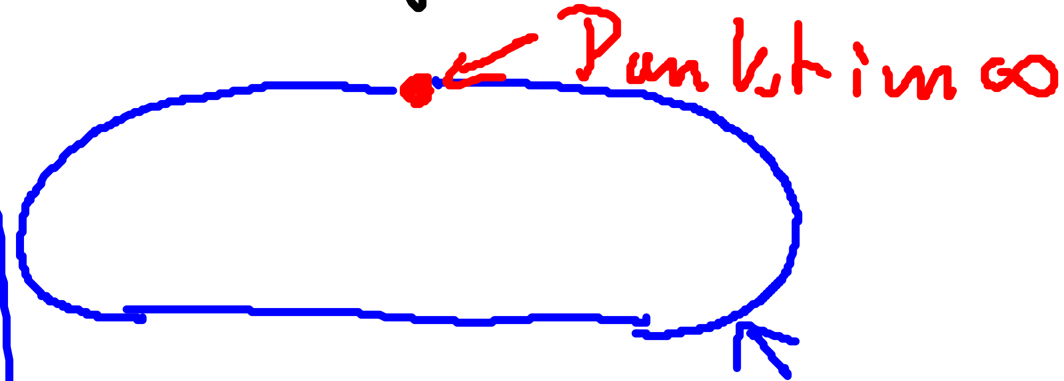
$$\Rightarrow \lambda\mu'\langle A\times B', X\rangle=-\mu\lambda'\langle B\times A', X\rangle \Rightarrow \frac{\lambda'}{\mu'}=\boxed{-\frac{\langle A\times B', X\rangle}{\langle B\times A', X\rangle}}\cdot\frac{\lambda}{\mu}$$

$=\tau$

\- Aufbau der Gerade $\mathbb{RP}^1$ analog zu $\mathbb{RP}^2$

homogene Koordinaten auf proj. Gerade.





$\sim S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Reelle Gerade

$$\mathbb{RP}^1 = \frac{\mathbb{R}^2 - \left\{\binom{0}{0}\right\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$ Punkte der Proj. Gerade

$$\mathbb{KP}^n = \frac{\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}}{\mathbb{K} - \{0\}}$$

Projektive Transformationen in $\mathbb{RP}^1$

$$\binom{\lambda}{\mu} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{\lambda}{\mu} \qquad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\binom{\lambda}{1} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{\lambda}{1} = \binom{a\lambda + b}{c\lambda + d} \sim \begin{pmatrix} \frac{a\lambda+b}{c\lambda+d} \\ 1 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}$

$$\lambda \mapsto \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

Möbius-Trafo.

bisher $\mathbb{RP}^2$, $\mathbb{RP}^1$,

später in Vorlesung

$\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{RP}^d$

Doppelverhältnis

$[A,B] := \det \begin{pmatrix} | & | \\ A & B \\ | & | \end{pmatrix}$

Def: Seien A, B, C, D vier Vektoren aus $\mathbb{R}^2 - \{\binom{0}{0}\}$

$$(A, B; C, D) := \frac{[AC][BD]}{[AD][BC]}$$

heißt Doppelverhältnis.

Lemma 1 $(A, B; C, D) = (\alpha A, \beta B; \gamma C, \delta D)$ für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$

Bew

$$\frac{[\alpha A, \gamma C][\beta B, \delta D]}{[\alpha A, \delta D][\beta B, \gamma C]} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta \cdot [AC][BD]}{\alpha\beta\gamma\delta \cdot [AD][BC]} = \frac{[AC][BD]}{[AD][BC]}$$

$$= (A, B; C, D)$$

<u>Lemma 2</u> Sei M eine invertierbare 2×2 Matrix dann gilt:

$$(A,B;C,D) = (M\cdot A, M\cdot B; MC, MD)$$

<u>Bew</u>

$$\frac{[MA, MC][MB, MD]}{[MA, MD][MB, MC]} = \frac{(\det(M))^2\cdot [A,C][B,D]}{(\det(M))^2\cdot [A,D][B,C]}$$

$$= \frac{[A,C][B,D]}{[A,D][B,C]} = (A,B;C,D)$$

$$[MX, MY]$$
$$= \det\begin{pmatrix} | & | \\ Mx & MY \\ | & | \end{pmatrix}$$
$$= \det\left(M\cdot\begin{pmatrix} | & | \\ x & Y \\ | & | \end{pmatrix}\right)$$
$$= \det(M)\cdot [X\ Y]$$