Letztes Mal: Die reelle Projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$

reell

Projektiv

Dimens.

$(\mathcal{P}_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \mathcal{I}_{\mathbb{R}})$

Punkte Geraden Inzidenzrelation

Dargestellt durch Äquivalenzklassen von 3-dimensionalen Vektoren

$p \in \mathbb{R}^3$; $[p] = \{\lambda \cdot p \mid \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$

$[p] \mathcal{I} [\ell]$
$\Leftrightarrow \langle p, \ell \rangle = 0$

$[p], [q], [r]$ kollinear
$\Leftrightarrow \det(p, q, r) = 0$

Später:

$\mathbb{RP}^3$
$\vdots$
$\mathbb{RP}^d$
$\vdots$
$\mathbb{RP}^1$
$\vdots$
$\mathbb{CP}^1$
$\vdots$
$\mathbb{KP}^d$

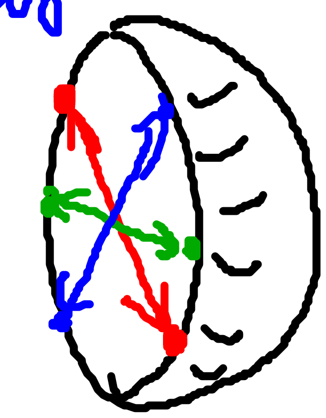
Die „Form" von $\mathbb{RP}^2$

- Kugeldarstellung

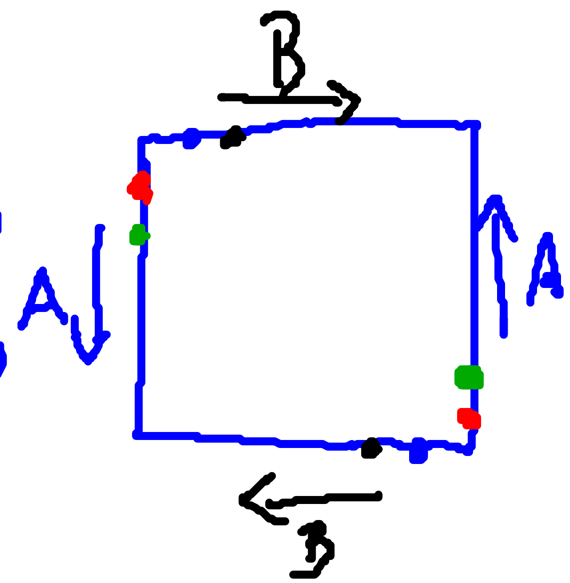
in jeder Äquivalenzklasse $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] \in P_{\mathbb{R}}$
gibt es zwei Vektoren auf $S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x^2+y^2+z^2=1 \right\}$

$\mathbb{RP}^2$ überdeckt die S^2 zur Hälfte

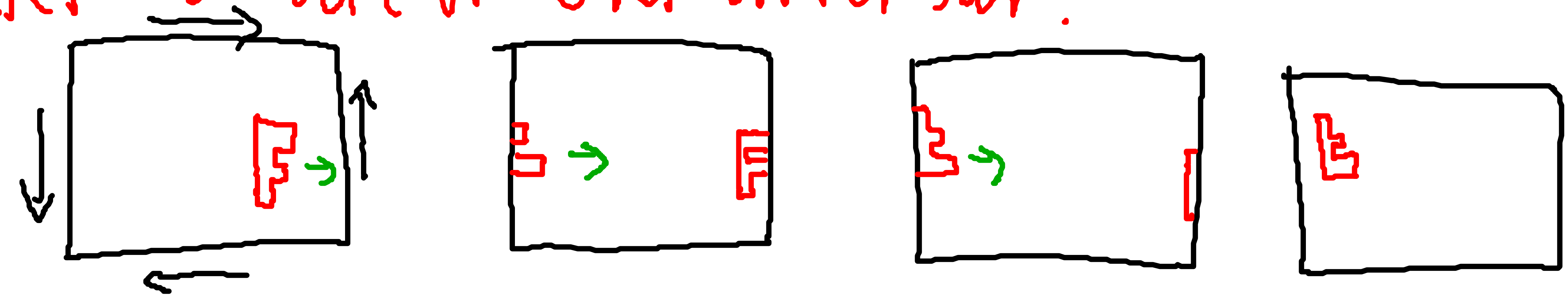
Topologisch



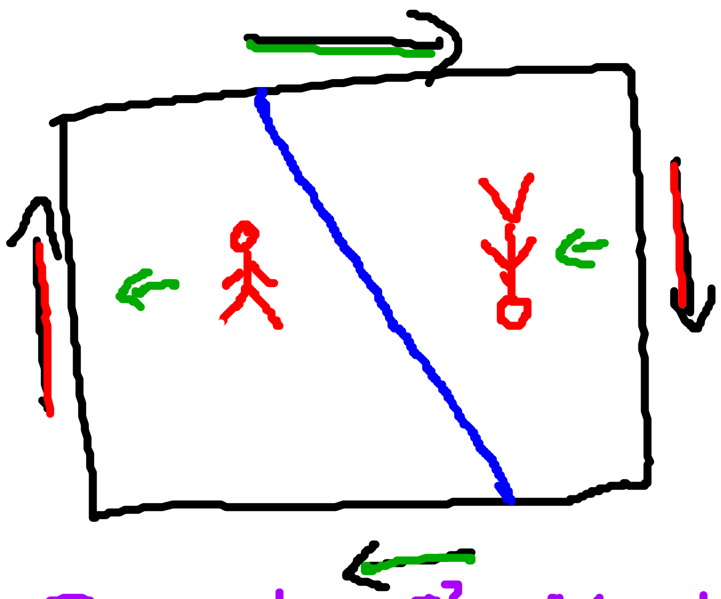
Identifiziere gegenüberliegende Punkte auf dem Rand einer Halbkugel



$\mathbb{RP}^2$ ist nicht orientierbar.

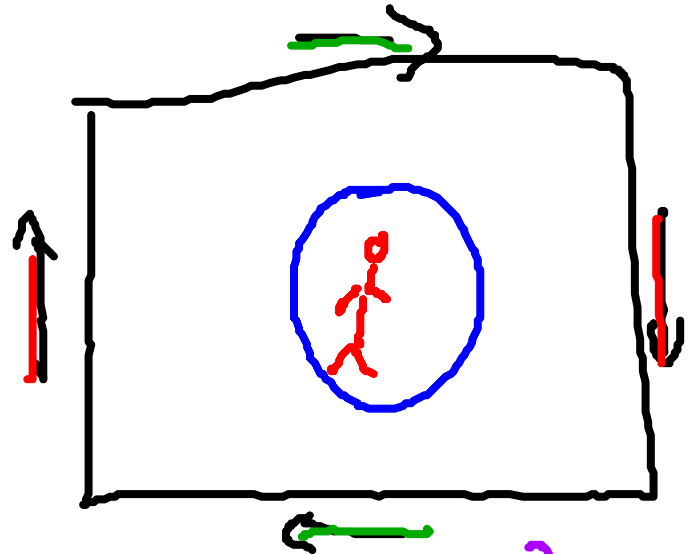


Auf $\mathbb{RP}^2$ gibt es zwei topologische Typen von geschlossenen Linien



zerlegt $\mathbb{RP}^2$ NICHT in zwei Teile

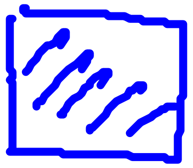
„geradenartig"



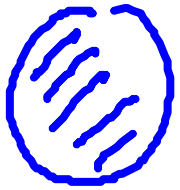
zerlegt $\mathbb{RP}^2$ in zwei Gebiete

„kreisartig"

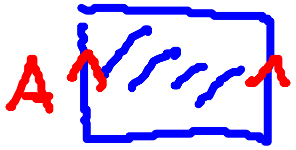
kleinen Exkurs: Raumformen (Verkleben der gegenüberliegenden Seiten eines Rechtecks)



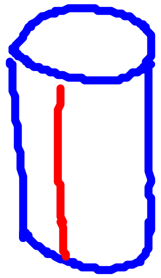
← Kreisscheibe



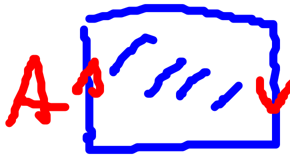
1 Rand
2 Seiten



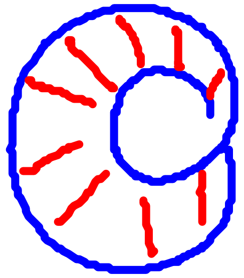
← Zylinder



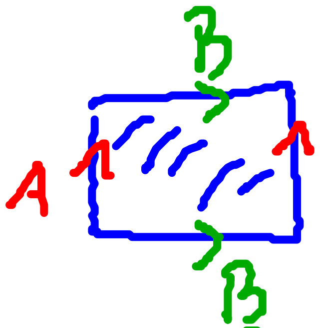
2 Ränder
2 Seiten



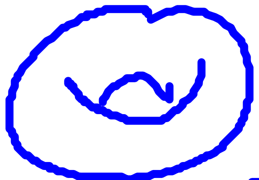
← Möbius-band



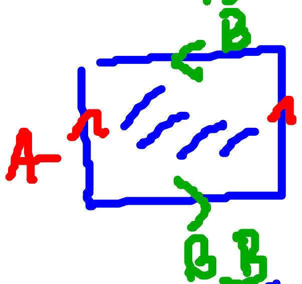
1 Rand
1 Seite



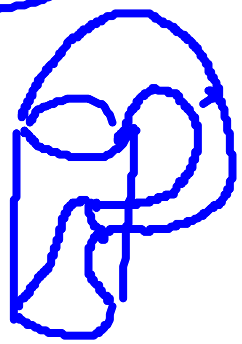
← Torus



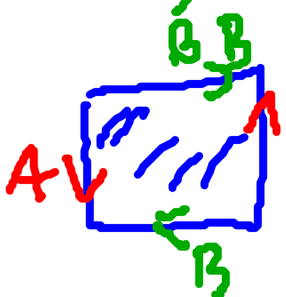
kein Rand
2 Seiten



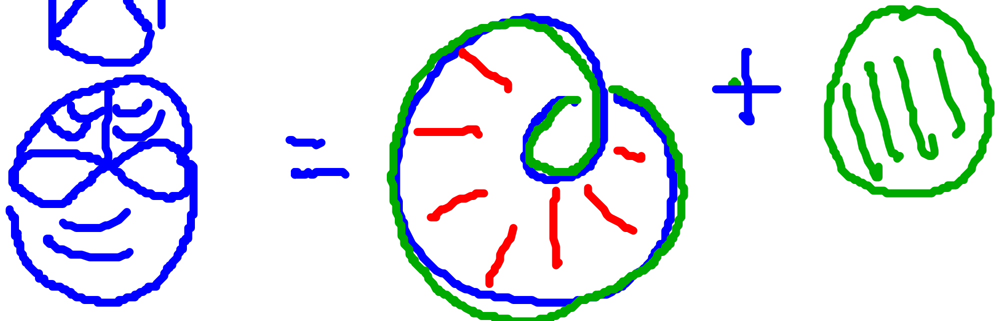
← Klein'sche Flasche



Kein Rand
1 Seite



← $\mathbb{RP}^2$



② Transformationen in $\mathbb{RP}^2$

Im Euklidischen:

z.B. lineare Transformationen (z.B. Rotationen um O)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Translationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Problem: Verkettung von Operationen

Projektiv

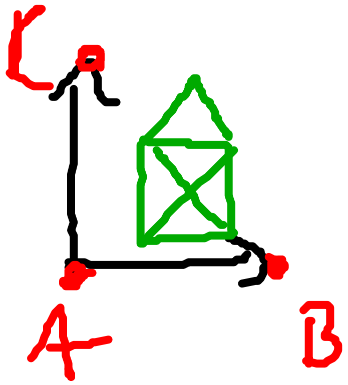
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

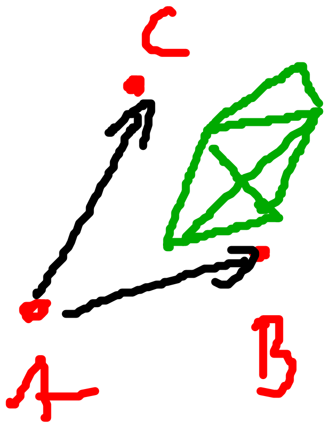
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine affine Transformationen

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \det(M) \neq 0$$

Verschiebungen
Rotation um bel. Punkt
Spiegelungen um bel. Achse
Scherungen
+ Verkettungen all dieser Abb.





Abbildungen die Parallelität erhalten

Allgemeine projektive Transformationen im $\mathbb{R}P^2$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \; ; \; \det(M) \neq 0$$

$$[p] \mapsto [M \cdot p]$$

Alle Affine Trafos

+ Perspektivische Verzerrungen

M und λM für $\lambda \neq 0$

Repräsentieren die gleiche Trafo. $[M] = \{\lambda M \mid \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$

Satz Projektive Transformation führen kollineare Punktetripel wieder in kollineare Punktetripel über.

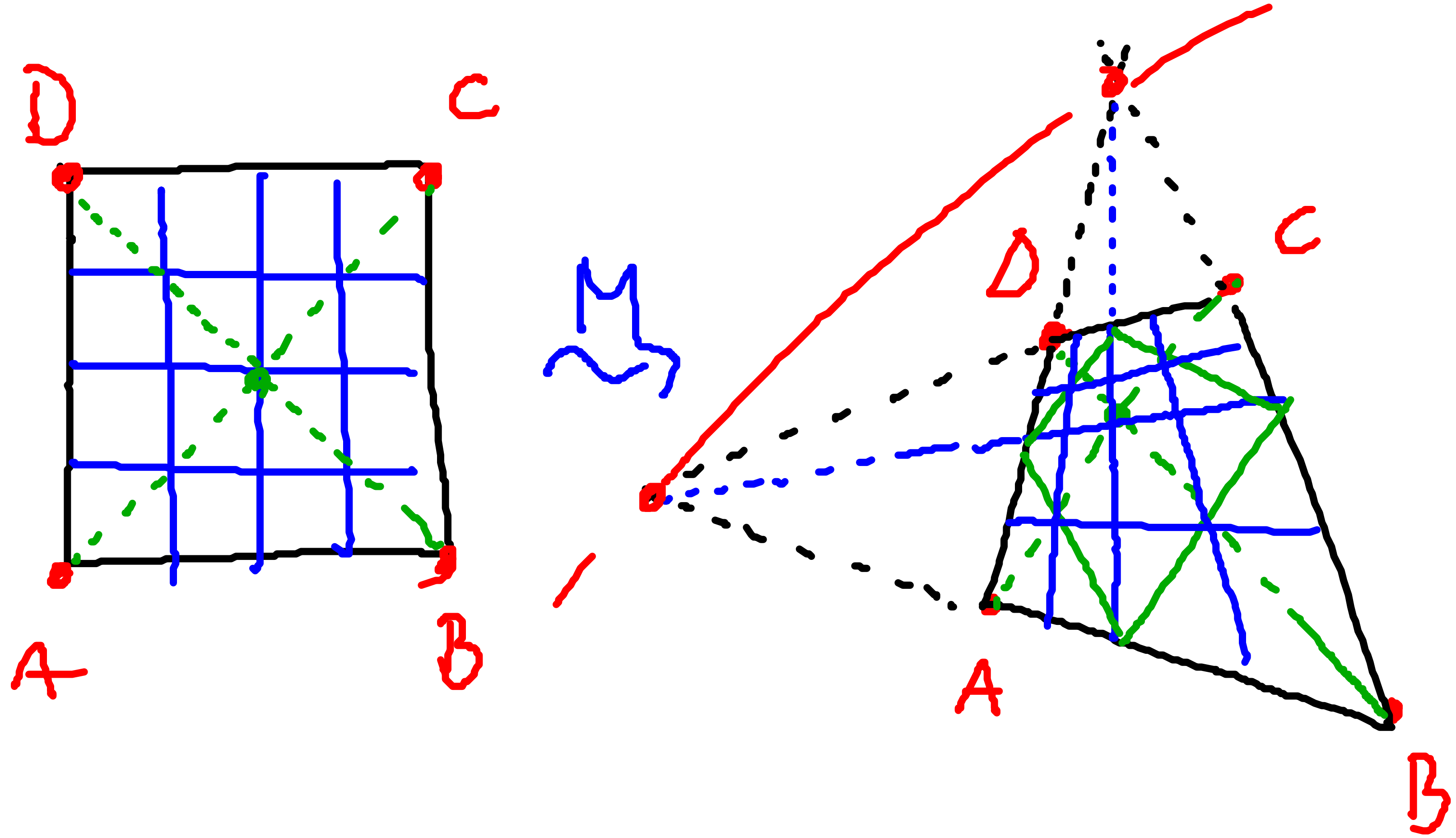
Bew: $[p],[q],[r]$ kollinear

$\Leftrightarrow \det(p,q,r)=0$

$\Leftrightarrow \det(M\cdot p, M\cdot q, M\cdot r) = \det(M\cdot(p,q,r))$

$= \det(M)\cdot\det(p,q,r)=0$

$\Leftrightarrow [Mp],[Mq],[Mr]$ kollinear



Wie berechnet man M?