34. $\mathcal{U} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}\cdot\mathcal{U}^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det \mathcal{U} = \frac{1}{27}\cdot(8+8-1+4+4+4) = 1 \Rightarrow$ $\underline{\mathcal{U} \text{ ist Drehmatrix}}$

Drehachse $\vec{r}$: gesucht $\vec{x} \in \mathbb{R}\setminus\{\vec{0}\}$ mit $\mathcal{U}\vec{x} = \vec{x}$

$$\begin{array}{lll} 2x+2y+z=3x & & -x+2y+z=0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow \quad x-2y+2z=3y & \Leftrightarrow & x-5y+2z=0 \quad (2) \\ 2x-y-2z=3z & & 2x-y-5z=0 \quad (3) \end{array}$$

(o.E $z=1$)

$(1)+(2) \Rightarrow -3y+3z=0 \Rightarrow y=z \overset{(1)}{\Rightarrow} x=3y=3z$

U besitzt sicher einen EV zum EW $\lambda=1$ $\Rightarrow$ (3) ist LK von (1) $\wedge$ (2)

$\Rightarrow \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}$ ist Richtung der Drehachse

Damit ist $\vec{r}$ normiert und durch die Wahl von $+\vec{r}$ orientiert

Drehwinkel δ?

$\underline{\text{1. Weg}}$: Wähle $\vec{s} \perp \vec{r}$ z.B. $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ o.E auf 1 normiert

$\Downarrow$

$\Rightarrow \vec{s}\,' = \mathcal{U}\vec{s} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{s}\,'| = 1$

$\cos\delta = \frac{\vec{s}\circ\vec{s}\,'}{|\vec{s}||\vec{s}\,'|} = \vec{s}^T\vec{s}\,' = \frac{1}{6}\cdot(0\ 1\ -1)\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-5}{6}$ bis auf Orientierung

$\underline{\text{2. Weg}}$: $\cos\delta = \frac{\text{spur}\,\mathcal{U} - 1}{2} = \frac{\frac{1}{3}(2-2-2)-1}{2} = \frac{-5}{6}$

Vorzeichen von δ? $-\pi < \delta < \pi$

Ist $\{\vec{s}, \vec{s}\,', \vec{r}\}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem $\Rightarrow \delta > 0$

$\det(\vec{s}, \vec{s}\,', \vec{r}) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cdot\underline{\frac{1}{3\sqrt{2}}}\cdot\underline{\frac{1}{\sqrt{11}}}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$ Faktoren ausklammern

$= \frac{1}{6\sqrt{11}}\cdot(-1+3-12-1) = \frac{-11}{6\sqrt{11}} < 0 \Rightarrow \delta = -\underbrace{\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)}_{\in[0,\pi]}$

Ersetzt man $\vec{r}$ durch $-\vec{r}$, d.h. orientiert man die Drehachse um, so wird auch δ umorientiert, d.h. $\delta \to -\delta$

35 $\vec{s} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$, S schiefsym. Matrix mit $\underline{S\vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}}$ **(0)**

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} s_2x_3 - s_3x_2 \\ s_3x_1 - s_1x_3 \\ s_1x_2 - s_2x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$S^T = \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} = -S \Rightarrow S \text{ ist schiefsymmetrisch.}$$

a) Zeige $E-S$ ist regulär:

Bew 1: (algebraisch rechnerisch) $E-S$ regulär $\Leftrightarrow \det(E-S) \neq 0$

$$\underline{\det(E-S)} = \det\begin{pmatrix} 1 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 1 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + s_1\cancel{s_2}s_3 - s_1\cancel{s_2}s_3 + s_2^2 + s_1^2 + s_3^2 =$$

$$= \underline{1 + |\vec{s}|^2} \geq 1 > 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Bew 2: (vektoriell) $E-S$ regulär $\Leftrightarrow [(E-S)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = 0]$

Sei $\vec{0} = (E-S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} \overset{(0)}{=} \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}$ $(*)$

Andererseits gilt $\vec{x} \perp \vec{s} \times \vec{x} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \vec{x} \perp \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ ✓

Bew 3: Variante zu Bew 2:

Sei $\vec{0} = (E-S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} \overset{(0)}{=} \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x} \quad | \circ \vec{x}$ (Skalarprod)

$$\Rightarrow 0 = \vec{x} \circ \vec{x} - \underbrace{(\vec{s} \times \vec{x}) \circ \vec{x}}_{=0} \Leftrightarrow \vec{x} \circ \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0} \ ✓$$

b) Zeige $U := (E-S)^{-1}(E+S)$ ist Drehmatrix, d.h. $UU^T = E$, $\det U = 1$

$$UU^T = (E-S)^{-1}(E+S)[(E-S)^{-1}(E+S)]^T = \qquad (A \cdot B)^T = B^T A^T$$

$$= (E-S)^{-1}(E+S)\underbrace{(E+S)^T}_{\shortparallel}\underbrace{((E-S)^{-1})^T}_{\shortparallel} \qquad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$\overset{NR}{=} (E-S)^{-1}\underline{(E+S)(E-S)}(E+S)^{-1}$$

$$\overset{NR}{=} \underbrace{(E-S)^{-1}(E-S)}_{E} \cdot \underbrace{(E+S)(E+S)^{-1}}_{E} = E \cdot E = E \ ✓$$

NR: $\underline{E+S} = \begin{pmatrix} 1 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 1 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{(E-S)^T}$ und $(E+S)^T = E-S$

NR: $(E+S)(E-S) = E \cdot E + S \cdot E - E \cdot S - S \cdot S = (E-S)(E+S)$

Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(\mathcal{U}) = \det[(E-S)^{-1}(E+S)] = \det[(E-S)^{-1}] \cdot \det(E+S)$$

$$= \frac{1}{\det(E-S)} \cdot \det(E+S) \underset{\text{s.o.}}{\overset{\text{NR}}{=}} \frac{\det[(E-S)^T]}{\det(E-S)} = \frac{\det(E-S)}{\det(E-S)} = 1 \checkmark$$

$\det(A^T) = \det(A)$

alternativ mit (1)

$\det(E-S) = 1 + |\vec{s}|$ und $\det(E+S) = \det(E-(-S)) = 1 + |-\vec{s}| = 1 + |\vec{s}|$

c) Drehachse ? Gesucht $\vec{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\vec{0}\}$ mit $\mathcal{U}\vec{x} = \vec{x}$

$\Leftrightarrow (E-S)^{-1}(E+S)\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow (E+S)\vec{x} = (E-S)\vec{x}$

$\Leftrightarrow S\vec{x} = -S\vec{x} \Leftrightarrow 2S\vec{x} = \vec{0} \overset{(0)}{\Leftrightarrow} \vec{s} \times \vec{x} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \lambda \vec{s}$ d.h. $\vec{s}$ ist (nichtorient.) Richtung der Drehachse

Drehwinkel φ:

Da die Abbildung geometrisch definiert ist, also unabhängig vom Koord.system, dürfen wir das Koord.system so wählen, dass die z-Achse in Richtung von $\vec{s}$ zeigt, d.h. $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}$, $s > 0$

$$\Rightarrow E+S = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E-S = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (E-S)^{-1} = \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}$$

Beachte: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathcal{U} = (E-S)^{-1}(E+S) = \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} 1-s^2 & -2s & 0 \\ 2s & 1-s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehmatrix um z-Achse

$$\Rightarrow \underline{\cos\varphi = \frac{1-s^2}{1+s^2}}, \quad \underline{\sin\varphi = \frac{2s}{1+s^2}}$$

Betrachte $\varphi = 2\tau$ so gilt

$$\cos 2\tau = \cos^2\tau - \sin^2\tau = 2\cos^2\tau - 1 = \frac{1-s^2}{1+s^2} \Rightarrow \cos^2\tau = \frac{1}{1+s^2}$$

$$\sin 2\tau = 2\sin\tau\cos\tau = \frac{2s}{1+s^2} \Rightarrow \sin\tau\cos\tau = \frac{s}{1+s^2}$$

$\Rightarrow \tan\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau} = s$ (Länge des Vektors $\vec{s}$) Ergebnis koord. unabhängig