Z 25. Ebenen durch den Mittelpunkt einer Kugel mit Radius r schneiden die Kugeloberfläche in sogenannten Großkreisen, also in Kreisen mit Radius r. Mit Großkreisbögen kann man auf der Kugel Dreiecke (sphärische Dreiecke) bilden, Lote fällen, usw. Dabei ist der Abstand zwischen zwei Punkten die Länge des (kleineren) Bogens auf dem Großkreis durch die beiden Punkte und der Winkel zwischen zwei Großkreisen der Schnittwinkel der Großkreisebenen.

1. Schneiden sich bei sphärischen Dreiecken die Mittelsenkrechten in einem Punkt?
2. Schneiden sich bei sphärischen Dreiecken die Winkelhalbierenden in einem Punkt?
3. Schneiden sich bei sphärischen Dreiecken die Seitenhalbierenden in einem Punkt?
4. Schneiden sich bei sphärischen Dreiecken die Höhen in einem Punkt?

Eine Gerade durch den Mittelpunkt M einer Kugel heißt Durchmesser und schneidet die Kugel in zwei einander gegenüberliegenden Punkten, die Gegenpunkte (antipodische Punkte) genannt werden.
Zwei Ebenen durch M schneiden einander in einem Kugeldurchmesser. Also schneiden sich zwei Großkreise, die „Geraden" der sphärischen Geometrie, stets in einem Gegenpunktepaar. Insofern gibt es in der sphärischen Geometrie keine Parallelen!

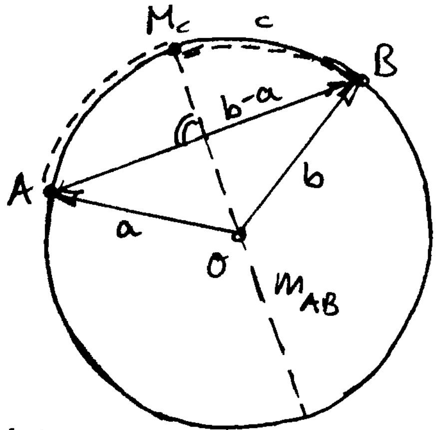
- Drei Großkreise schneiden einander genau dann in einem Gegenpunktepaar, wenn die Kreisebenen einander längs einer Geraden (durch M) schneiden, d.h. genau dann, wenn die Normalenvektoren der drei Kreisebenen linear abhängig sind.
Analytisch gilt für den Schnitt $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3$ mit $O = M$:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 : \ n_1^T x = 0 \qquad \text{LGS} \\ \varepsilon_2 : \ n_2^T x = 0 \iff (n_1, n_2, n_3)^T x = 0 \\ \varepsilon_3 : \ n_3^T x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{hat 1-dim. Lösung} \\ \iff Rg(n_1, n_2, n_3) = 2 \\ \iff n_1, n_2, n_3 \text{ linear abhängig,} \end{array}$$

aber nicht alle 3 Kreisebenen identisch!

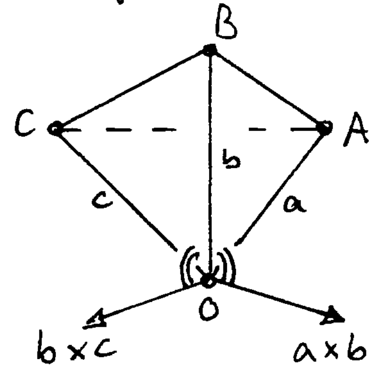
- Einen Normalenvektor der Ebene des Großkreises durch zwei Punkte A und B der Kugel mit $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, $\|a\| = \|b\| = r$ erhält man als $n = a \times b \Rightarrow \varepsilon_{AB} : n^T x = 0$, sofern $a \neq \pm b$! keine Gegenpunkte
- Die Schnittpunkte $S_{1,2}$ zweier Großkreise $\varepsilon_1 : n_1^T x = 0$, $\varepsilon_2 : n_2^T x = 0$ erhält man als $\vec{OS}_{1,2} = s_{1,2} = \pm r \cdot \frac{n_1 \times n_2}{\|n_1 \times n_2\|}$, sofern $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$!

Bemerkung: Sowohl die Großkreisebene durch zwei Punkte als auch die Schnittpunkte zweier Großkreise berechnen sich mit Hilfe des Vektorprodukts.



1) Mittelsenkrechte: Normalenvektoren (nicht normiert): $b-a$, $c-b$, $a-c$ $\Rightarrow$ Summe $= 0$, also linear abhängig $\overset{\text{die 3}}{\Rightarrow}$ Mittelsenkrechten schneiden sich!

Bem: Betrachte o.E. Kugel so, dass Großkreisbogen $\widehat{AB}$ unverzerrt erscheint $\Rightarrow$ M_C auf „Mittellot" $\overline{AB}$, Mittellotebene m_{AB} projizierend, (d.h. m_{AB} liegt in Blickrichtung und erscheint als Gerade).

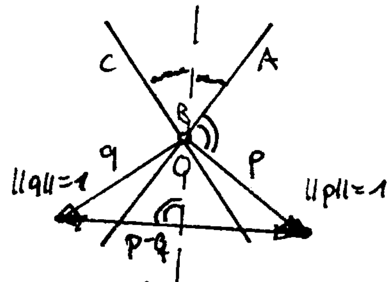


2) Winkelhalbierende: Normalenvektoren der Dreiecksseiten(ebenen) sind (normiert)

$p = \frac{a \times b}{\|a \times b\|}$, $q = \frac{b \times c}{\|b \times c\|}$, $s = \frac{c \times a}{\|c \times a\|}$ $\Rightarrow$

Normalen der Winkelhalbierenden(ebenen)

$p-q$, $q-s$, $s-p$ $\Rightarrow$ Summe $= 0$, also linear abhängig $\overset{\text{die 3}}{\Rightarrow}$ Winkelhalbierenden schneiden sich!



Bem.: Die Orientierung von p, q, s ist so gewählt, dass bei dem Tetraeder OABC die Normalenvektoren nach außen weisen $\Rightarrow$ $p-q$ ist Normale der Innenwinkelhalbierenden(ebene)

3) Die Ebene der Seitenhalbierenden s_{AB} wird aufgespannt von $\overrightarrow{OM} \parallel \underset{}{\overset{\text{vgl. 1}}{\underline{(a+b)}}}$ und $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, analog $s_{BC}: (b+c), a$; $s_{CA}: (c+a), b$ $\Rightarrow$

Zugehörige Normalenvektoren (nicht normiert)

$(a+b) \times c$, $(b+c) \times a$, $(c+a) \times b$

Summe: $(a \times c + b \times c) + (\underbrace{b \times a}_{=-(a \times b)} + \underbrace{c \times a}_{=-(a \times c)}) + (\underbrace{c \times b}_{=-(b \times c)} + a \times b) = 0$ $\Rightarrow$

linear abhängig $\overset{\text{die 3}}{\Rightarrow}$ Seitenhalbierenden schneiden sich!

4) Die Ebenen der Höhen werden aufgespannt von c und p bzw a und q bzw b und s (vgl. 2.)

Für die Normalenvektoren dieser Ebenen gilt

$$\left.\begin{aligned} c \times (a \times b) &= \langle c, b\rangle a - \langle c, a\rangle b \\ a \times (b \times c) &= \langle a, c\rangle b - \langle a, b\rangle c \\ b \times (c \times a) &= \langle b, a\rangle c - \langle b, c\rangle a \end{aligned}\right\} \text{Summe} = 0\text{, also linear abhängig}$$

(Graßmann Identität, vgl. 426 ① bzw ②)

$\Rightarrow$ Die 3 Höhen schneiden sich.

Bem: Ist z.B. $c = \pm S p$, so sind alle Großkreise durch c senkrecht zur Seitenebene von $\widehat{AB}$, also die Höhe durch c nicht eindeutig bestimmt. Man nennt c dann Pol von $\widehat{AB}$.

Vgl. Figuren mit Cinderella auf Homepage