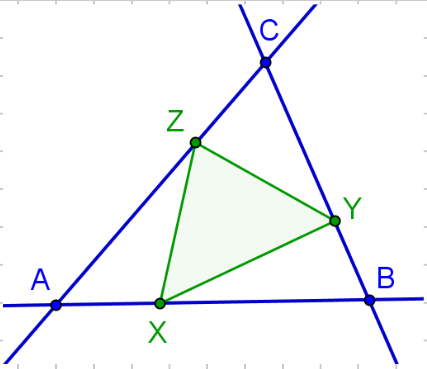
WS2010/11 Geometrie 1 LB Blatt 13 Hausaufgaben

Notiztitel 01.02.2011

H27



Betrachte das Dreieck im $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$

$F_1 = \frac{1}{2} |\underline{\vec{AB}} \times \underline{\vec{AC}}|$

$F_2 = \frac{1}{2} |\vec{XY} \times \vec{XZ}|$

$\vec{AX} = \frac{1}{2}\vec{XB} \Rightarrow X$ auf Gerade AB

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{AX} + \vec{XB} = \vec{AX} + 2\vec{AX} = 3\vec{AX}$

$\Rightarrow \vec{AX} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ analog $\vec{BY} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{CZ} = \frac{1}{3}\vec{CA}$ (vgl. H28)

$\vec{XY} = \vec{XB} + \vec{BY} = (\vec{AB} - \vec{AX}) + \vec{BY} = \frac{2}{3}\underline{\vec{AB}} + \frac{1}{3}\vec{BC}$

$\vec{XZ} = \vec{XA} + \vec{AZ} = -\vec{AX} + (\vec{AC} + \vec{CZ}) = -\frac{1}{3}\underline{\vec{AB}} + \frac{2}{3}\underline{\vec{AC}}$

Zum Vergleich von F_1 und F_2

$\vec{XY}$ und $\vec{XZ}$ ausdrücken in $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$:

$\vec{XY} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$

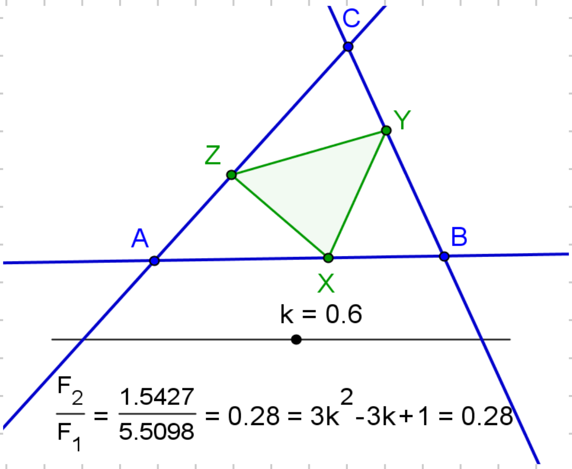
$\Rightarrow F_2 = \frac{1}{2} |\vec{XY} \times \vec{XZ}| =$

$= \frac{1}{2} |\frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) \times (-\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC})| =$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} | -\frac{1}{3}\underbrace{\vec{AB} \times \vec{AB}}_{=0} + \frac{2}{3}\vec{AB} \times \vec{AC} - \frac{1}{3}\underbrace{\vec{AC} \times \vec{AB}}_{= -\vec{AB} \times \vec{AC}} + \frac{2}{3}\underbrace{\vec{AC} \times \vec{AC}}_{=0} |$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{3} F_1 \quad \Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{1}{3}}}$

H28.



Betrachte das Dreieck im $\mathbb{R}^3$

$\vec{AX} = k \cdot \vec{AB} \Rightarrow X$ auf Gerade AB

analog Y auf BC, Z auf CA.

$F_1 = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ (1)

$F_2 = \frac{1}{2} |\vec{XY} \times \vec{XZ}|$ (2)

Zum Vergleich von F_1 und F_2 möglichst $\vec{XY}$ und $\vec{XZ}$ durch $\vec{AB}$ und $\vec{AC}$ ausdrücken.

$$\left.\begin{aligned}\vec{XY} &= \vec{XA}+\vec{AB}+\vec{BY} = -k\cdot\vec{AB}+\vec{AB}+k\cdot\vec{BC} = \\ &= (1-k)\vec{AB}+k\cdot(\vec{AC}-\vec{AB}) = (1-2k)\vec{AB}+k\vec{AC} \\ \vec{XZ} &= \vec{XA}+\vec{AC}+\vec{CZ} = -k\cdot\vec{AB}+(1-k)\vec{AC}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\vec{XY}\times\vec{XZ} &= [(1-2k)\vec{AB}+k\vec{AC}]\times[-k\vec{AB}+(1-k)\vec{AC}] = \\ &= -(1-2k)k\underbrace{\vec{AB}\times\vec{AB}}_{=0}+(1-2k)(1-k)\vec{AB}\times\vec{AC}+ \\ &\quad -k^2\underbrace{\vec{AC}\times\vec{AB}}_{=-\vec{AB}\times\vec{AC}}+k(1-k)\underbrace{\vec{AC}\times\vec{AC}}_{=0} = \\ &= [1-3k+2k^2+k^2]\cdot\vec{AB}\times\vec{AC} \qquad (3) \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

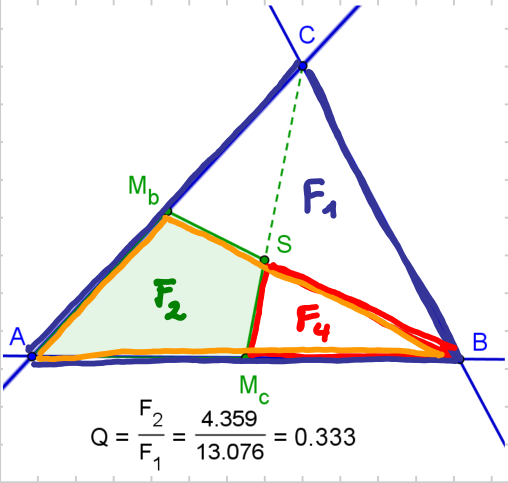
$$F_2 = \frac{1}{2}|\vec{XY}\times\vec{XZ}| = |3k^2-3k+1|\cdot\frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}\times\vec{AC}| = |3k^2-3k+1|\cdot F_1 \quad (4)$$

Wegen $3k^2-3k+1=0 \Leftrightarrow k_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{6}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

ist $3k^2-3k+1>0 \;\forall\, k\in\mathbb{R}$. $\Rightarrow \underline{\frac{F_2}{F_1} = 3k^2-3k+1}$

F_2/F_1 ist minimal für $k=\frac{1}{2}$ d.h. für das Seitenmittendreieck

H29



Es gilt: S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1:2

$\Rightarrow \vec{BS} = \frac{2}{3}\vec{BM_b}$

Sei $\left\{\begin{matrix}F_3\\F_4\end{matrix}\right\}$ der Flächeninhalt des Dreiecks $\left\{\begin{matrix}ABM_b\\M_cBS\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$$\begin{aligned}F_3 &= \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AM_b}| = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\frac{1}{2}\vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{2}F_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_4 &= \frac{1}{2}|\vec{BM_c}\times\vec{BS}| = \frac{1}{2}|-\frac{1}{2}\vec{AB}\times\frac{2}{3}\vec{BM_b}| = \frac{1}{2}|-\frac{1}{2}\vec{AB}\times\frac{2}{3}(\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AC})| = \\ &= \frac{1}{2}|-\frac{1}{2}\vec{AB}\times\frac{2}{3}(-\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC})| = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \frac{1}{6}F_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow F_2 = F_3 - F_4 = \frac{1}{2}F_1 - \frac{1}{6}F_1 = \frac{1}{3}F_1$ also $\underline{Q = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{3}}$