WS2010/11 Geometrie 1 LB Übungen Blatt 12

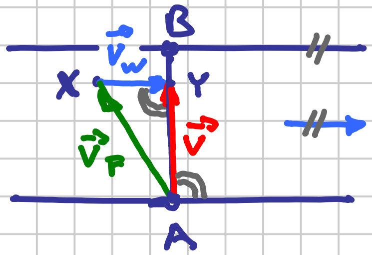
Notiztitel 21.01.2011

T30 Die Geschwindigkeiten kann man als Vektor auffassen. Überlagern zwei Geschwindigkeiten einander, so ist die resultierende Gesamtgeschwindigkeit die Vektorsumme der beiden Einzelgeschwindigkeiten.

Die Geschwindigkeit des Fährschiffes relativ zu den Flussufern setzt sich also zusammen aus der

- der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers (3 m/s, Richtung ∥ Flussufer) $\vec{v}_W =: \overrightarrow{XY}$
- der Geschwindigkeit des Fährschiffes gegenüber der Wasseroberfläche $\vec{v}_F =: \overrightarrow{AX}$
  (18 km/h $\hat{=} \frac{18 \cdot 10^3}{3600}$ m/s = 5 m/s)

⇒ • Geschwindigkeit des Fährschiffes gegenüber dem Land, $\vec{v} \perp \vec{v}_W$ ∥ Flussufer $\vec{v} := \vec{v}_F + \vec{v}_W$



Man wird das Schiff so steuern (Richtung von $\vec{v}_F$), dass die resultierende Geschwindigkeit $\vec{v} \perp$ Ufer ist.

Gesucht: Fahrzeit $= \frac{|\text{Weg}|}{|\text{Geschwindigkeit}|}$

Die Länge des Weges von A nach B ist 2000 m

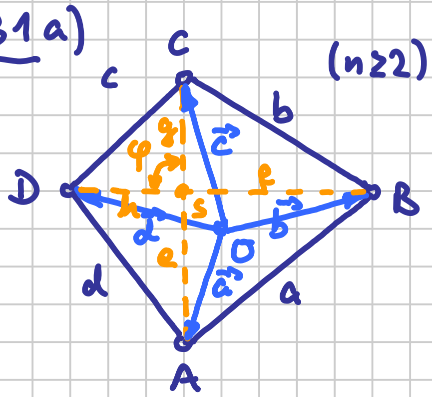
Es genügt also, den Betrag von $\vec{v}$ zu bestimmen.

Da das Dreieck AXY bei Y einen rechten Winkel hat, erhält man $|\vec{v}|$ mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_F|^2 - |\vec{v}_W|^2 = 25 - 9 = 16 \left[\frac{m^2}{s^2}\right] \Rightarrow |v| = 4 \left[\frac{m}{s}\right]$$

⇒ <u>Fahrzeit</u> $= \frac{2000}{4} = 500\,[s] \,\hat{=}$ <u>8 Minuten und 20 Sekunden</u>

T31 a)



$(n\geq 2)$

Im $\mathbb{R}^n$ ist durch das Skalarprodukt $\vec{x}\circ\vec{y}$ eine Norm $|\vec{x}|=\sqrt{\vec{x}\circ\vec{x}}$ gegeben.

Dann gilt:

(1) $AC\perp BD \Leftrightarrow \vec{AC}\circ\vec{BD}=0$

$\Leftrightarrow (\vec{c}-\vec{a})\circ(\vec{d}-\vec{b})=0$

$\Leftrightarrow \vec{c}\circ\vec{d}-\vec{c}\circ\vec{b}-\vec{a}\circ\vec{d}+\vec{a}\circ\vec{b}=0$

(2) $a^2+c^2=b^2+d^2 \Leftrightarrow |\vec{b}-\vec{a}|^2+|\vec{d}-\vec{c}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{d}|^2$

$\Leftrightarrow \cancel{\vec{b}\circ\vec{b}}-2\,\vec{b}\circ\vec{a}+\cancel{\vec{a}\circ\vec{a}}+\cancel{\vec{d}\circ\vec{d}}-2\,\vec{d}\circ\vec{c}+\cancel{\vec{c}\circ\vec{c}}=$

(Symmetrie) $=\cancel{\vec{c}\circ\vec{c}}-2\,\vec{c}\circ\vec{b}+\cancel{\vec{b}\circ\vec{b}}+\cancel{\vec{a}\circ\vec{a}}-2\,\vec{a}\circ\vec{d}+\cancel{\vec{d}\circ\vec{d}}\quad |:2$

$\Leftrightarrow 0=\vec{d}\circ\vec{c}-\vec{c}\circ\vec{b}-\vec{a}\circ\vec{d}+\vec{a}\circ\vec{b}$

Vergleich von (1) und (2) liefert die Behauptung.

b) Sind die Seiten eines Vierecks Stäbe fester Länge a, b, c, d, die in den Ecken A, B, C, D gelenkig miteinander verbunden sind, dann gilt für dieses Gelenkviereck nach a)

Ist $a^2+c^2=b^2+d^2$ (fest), dann sind die Diagonalen in jeder Stellung zueinander orthogonal.

Ist $a^2+c^2\neq b^2+d^2$ (fest), dann sind die Diagonalen in keiner Stellung zueinander orthogonal.

Bem: Offenbar genügen für obigen Beweis die Eigenschaften eines Skalarprodukts (sym. pos. def. Bilinearform). Man benötigt hier keine konkrete Darstellung z.B. mit Koordinaten.

alternativer Lösungsweg mit Hilfe des Cosinussatzes im $\mathbb{R}^2$:

$\Delta SAB:\ a^2=e^2+f^2-2ef\cos\varphi$

$\Delta SBC:\ b^2=f^2+g^2+2fg\cos\varphi$

$\Delta SCD:\ c^2=g^2+h^2-2gh\cos\varphi$

$\Delta SDA:\ d^2=h^2+e^2+2he\cos\varphi$

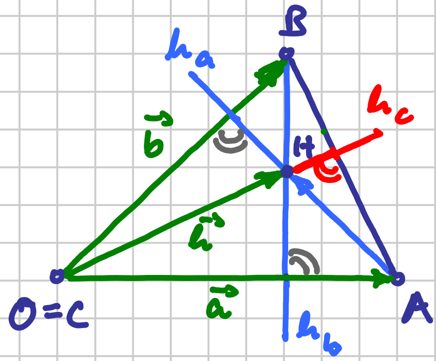
$\Rightarrow a^2+c^2=d^2+b^2$

$\Leftrightarrow -2(ef+gh)\cos\varphi=2(fg+he)\cos\varphi$

$\Leftrightarrow (\underbrace{fg+he+ef+gh}_{\neq 0})\cos\varphi=0$

$\Leftrightarrow \cos\varphi=0 \Leftrightarrow \varphi=90^\circ$

T32 **1. Weg** Vektorieller Beweis



gegeben: Dreieck ABC

Wähle o.E. O=C.

Sei $H = h_a \cap h_b$, Schnittpunkt der Höhen von A bzw B auf die gegenüberliegenden Seiten.

dann gilt (vgl. Figur):

$$\vec{AH} \perp \vec{OB} \iff (\vec{h}-\vec{a}) \circ \vec{b} = 0$$

$$\vec{BH} \perp \vec{OA} \iff \underline{(\vec{h}-\vec{b}) \circ \vec{a} = 0}$$

Subtraktion $\quad \vec{h} \circ \vec{b} - \vec{h} \circ \vec{a} - \cancel{\vec{a} \circ \vec{b}} + \cancel{\vec{a} \circ \vec{b}} = 0$

$$\iff \vec{h} \circ (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \iff \vec{OH} \perp \vec{AB} \iff \boxed{H \in h_c}$$

Bem: Für A, B, C kollinear, sind h_a, h_b, h_c zueinander parallel und schneiden einander in einem Fernpunkt!

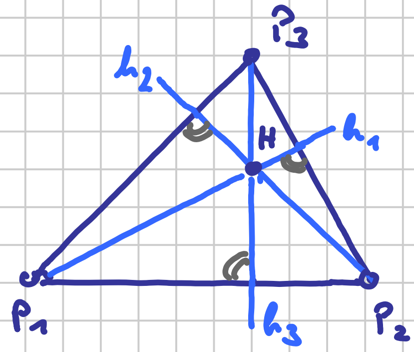
2. Weg Analytischer Beweis im $\mathbb{R}^2$.

Normalform einer Geraden g durch $A(\vec{a})$ mit Normale $\vec{n}$:

$g: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

Seien (x_i, y_i) die Koordinaten von P_i $(i = 1, 2, 3)$ dann ist die Normale von h_1:

$$\vec{n}_1 = \vec{P_2 P_3} = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Gleichung}$$



$$h_1: \vec{n}_1 \circ (\vec{x} - \vec{P}_1) = 0 \iff (x_3 - x_2)(x - x_1) + (y_3 - y_2)(y - y_1) = 0$$

Zyklische Vertauschung der Indizes liefert $(1 \to 2 \to 3 \to 1)$

$$\left.\begin{aligned} h_2&: (x_1 - x_3)(x - x_2) + (y_1 - y_3)(y - y_2) = 0 \\ h_3&: (x_2 - x_1)(x - x_3) + (y_2 - y_1)(y - y_3) = 0 \end{aligned}\right.$$

Die Summe der 3 linken Seiten ist Null, d.h. die 3 Geraden sind linear abhängig, d.h. schneiden einander in einem Punkt H $\Rightarrow$ Beh.

Bem: Die Koordinaten von H werden nicht benötigt!

3. Weg: Elementargeometrisch (Seitenmittendreieck)