WS 2010/11 Geometrie 1 LB Übungen Blatt 11

Notiztitel 16.01.2011

T27 In homo. Koord. $Q: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ $\quad |: x_0^2 \Rightarrow$

In kart. Koord. $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, z = \frac{x_3}{x_0}$ $\quad Q: 1 + x^2 - y^2 - z^2 = 0$

① Symmetrie

Offenbar ist mit $(x,y,z) \in Q$ auch $(-x,y,z), (x,-y,z)$ und $(x,y,-z) \in Q$, d.h. Q ist symmetrisch zu den Koordinatenebenen $x=0$; $y=0$ bzw $z=0$.

② Schnitt mit Ebenen $x = c = \text{const}$: (o.E. $c \geq 0$ wegen a))

$y^2 + z^2 = 1 + c^2 > 0$ Kreis um x-Achse in Ebene $x=c$ mit Radius $\sqrt{1+c^2}$ (∥ zur yz-Ebene)

Kleinster Kreis für $c=0$ in Ebene $x=0$ Kehlkreis

③ Schnitt mit Ebenen $y = c = \text{const}$: (∥ zur xz-Ebene)

$x^2 - z^2 = c^2 - 1$ Für $c \neq \pm 1$ ist dies in Ebene $y=c$ eine

Hyperbel mit Scheitel $\left\{ \begin{matrix} (\pm\sqrt{c^2-1}, c, 0), \text{ für } |c|>1 \\ (0, c, \pm\sqrt{1-c^2}), \text{ für } |c|<1 \end{matrix} \right\}$ geöffnet

in Richtung der $\left\{ \begin{matrix} x\text{-Achse} \\ z\text{-Achse} \end{matrix} \right\}$.

Für $c = \pm 1$ ist dies in der Ebene $y=c$ das Geradenpaar $z = \pm x$.

Bemerkung: $y = (\pm) 1$ ist die Tangentenebene $\vec{p}^T A \vec{x} = 0$ im Punkt $P(\vec{p})$ mit den homo. Punktkoord. $\vec{p} = (1, 0, (\pm) 1, 0)^T$, die Q in zwei Geraden schneidet, vgl. H23 d)

④ Schnitt mit Ebenen $z = c = \text{const}$: analog zu ③ ! $y \leftrightarrow z$

⑤ Schnitt mit Fernebene $x_0 = 0$: $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$

$\rightarrow x^2 - y^2 - z^2 = 0$ Asymptotenkegel mit Spitze $(0,0,0)$

Q ist ein einschaliges Drehhyperboloid um die x-Achse = Drehfläche mit der zur x-Achse windschiefen Erzeugenden $z = \pm x$ in Ebene $y=1$ und enthält damit 2 Geradenscharen, vgl. H23.

T28. <u>Analytische Lösung:</u>

$$x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$$

$Q: \vec{x}^T A \vec{x}=0$, $A=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{pmatrix}=A^T$, $\det A=1$

$F(\vec{f})$ mit $\vec{f}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\in Q$; da $\vec{f}^T A\vec{f}=1-1=0$ (homogene Pkt-Koord.)

Tangentenebene von Q in F: $\vec{f}^T A\vec{x}=0 \Leftrightarrow x_1-x_2=0$

Wähle $x_0'=x_1-x_2=0$ als Fernebene und ergänze zu einer Projektivität

$$x_1'=x_1+x_2$$
$$x_2'=x_0-x_3$$
$$x_3'=x_0+x_3$$

$$\vec{x}'=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&1\end{pmatrix}}_{=U \text{ mit } \det U\neq 0}\vec{x}$$

in homo. Koord.

$\Rightarrow x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2=$

$=(x_0-x_3)(x_0+x_3)+(x_1-x_2)(x_1+x_2)=x_2'x_3'+x_0'x_1'=0$

In kart. Koord. $x'=\frac{x_1'}{x_0'}$, $y'=\frac{x_2'}{x_0'}$, $z'=\frac{x_3'}{x_0'}$: $\underline{y'z'+x'=0}$

(1) <u>Schnitt mit Ebenen $y'=c=\text{const}$:</u>

$cz'+x'=0$ ist Gerade parallel zur xz-Ebene

(2) <u>Schnitt mit Ebenen $z'=c=\text{const}$:</u>

$y'c+x'=0$ ist Gerade parallel zur xy-Ebene

$\Rightarrow$ <u>Beh.</u>

Q ist ein Hyperbolisches Paraboloid.

<u>Synthetische Lösung:</u>

Nach H23 schneidet die Tangentenebene von Q in F die Quadrik Q in einem Geradenpaar $f_1\neq f_2$ mit $F=f_1\cap f_2$.

Die Tangentenebene von Q in $P_i\in f_i$ ($i=1$ oder 2) schneidet Q nach H23 in einem Geradenpaar $f_i\neq g_{P_i}$ mit $P_i=f_i\cap g_{P_i}$

$\Rightarrow Q$ trägt zwei Geradenscharen g_{P_i} durch $P_i\in f_i$ ($i=1,2$)

Wählt man $f_1 f_2$ als Fernebene

$\Rightarrow g_{P_i} \parallel$ Ebene mit f_i als Ferngerade $\forall P_i\in f_i$ ($i=1,2$)

$\Rightarrow$ Beh.

T29. $Q: x^2+2y^2+3z^2=12,\ z\geq 0$ (halbes Ellipsoid)

in kart. Koord. → homo. Koord. $x=\frac{x_1}{x_0},\ y=\frac{x_2}{x_0},\ z=\frac{x_3}{x_0}$

$$Q: 12x_0^2-x_1^2-2x_2^2-3x_3^2=\vec{x}^T\underbrace{\begin{pmatrix}12&&&0\\&-1&&\\&&-2&\\0&&&-3\end{pmatrix}}_{=:A=A^T,\ \det A\neq 0}\vec{x}=0$$

$P(\vec{p})$ und $R(\vec{r})$ zueinander polar $\Leftrightarrow \vec{p}^TA\vec{r}=0$

Polarebene zu $P(\vec{p})$: $\vec{p}^TA\vec{x}=0$. Es gilt:

Vorlesung

$R(\vec{r})\in$ Polarebene zu $P(\vec{p}) \Leftrightarrow P(\vec{p})\in$ Polarebene zu $R(\vec{r})$

$\vec{p}^TA\vec{r}=0$

Für $R(\vec{r})\in Q$ ist das die Tangentenebene von Q in R

$\Rightarrow Q\cap \vec{p}^TA\vec{x}=0$ ist Berührlinie des Tangenten Kegels von P an Q.

$P(\vec{p})$ mit $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\7\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}^TA\vec{x}=12x_0-3x_1-4x_2-27x_3=0$

Polarebene $\Rightarrow 3x+4y+27z-12=0$ in kart. Koord.

$A(0,0,2)$, $B(0,\sqrt{6},0)$, $C(2\sqrt{3},0,0)$ liegen auf Q ✓ Nachweis durch Einsetzen in Q

Einsetzen der Koord. in die Gleichung der Polarebene $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}P: 3\cdot 3+4\cdot 2+27\cdot 3-12=194>0\\ A: 27\cdot 2-12=42>0\end{array}\right\}\Rightarrow$ P und A auf derselben Seite der Polarebene $\Rightarrow$ A beleuchtet.

$\left.\begin{array}{l}B: 4\sqrt{6}-12\approx -2.2<0\\ C: 6\sqrt{3}-12\approx -1.6<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ P und B bzw. C liegen auf verschiedenen Seiten der Polarebene $\Rightarrow$ B, C im Schatten.

A, B, C auf der Eigenschattengrenze, wenn $\bar{P}(\vec{\bar{p}})$ im Schnittpunkt der Tangentenebenen von Q in A, B, C liegt:

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{a}^TA\vec{x}=12x_0-6x_3=0\\ \vec{b}^TA\vec{x}=12x_0-2\sqrt{6}x_2=0\\ \vec{c}^TA\vec{x}=12x_0-2\sqrt{3}x_1=0\end{array}\right.\Rightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\sqrt{3}\\\sqrt{6}\\2\end{pmatrix}=\vec{\bar{p}}\Rightarrow \bar{P}(2\sqrt{3},\sqrt{6},2)$$

homo. Koord. kart. Koord.

---

alternativ $\bar{P}(\vec{\bar{p}})$ ist Pol der Ebene durch ABC bzgl. Q

ABC: $0=12x_0-2\sqrt{3}x_1-2\sqrt{6}x_2-6x_3=\vec{\bar{p}}^TA\vec{x}\Rightarrow\vec{\bar{p}}$ wie oben ✓