WS 2010/11 Geometrie 1 LB Blatt 11 Hausaufgaben

Notiztitel 16.01.2011

H23 $B: \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = A^T$, $\det A = 1$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $P(\vec{p}) \in B \Leftrightarrow \vec{p}^T A \vec{p} = 1^2 + 1^2 - 1^2 - 1^2 = 0$ ✓

$Q(\vec{q}) \in B \Leftrightarrow \vec{q}^T A \vec{q} = 1^2 + (-1)^2 - (1)^2 - (-1)^2 = 0$ ✓

$R(\vec{r}) \in B \Leftrightarrow \vec{r}^T A \vec{r} = 1^2 + 1^2 - (-1)^2 - 1^2 = 0$ ✓

$S(\vec{s}) \in B \Leftrightarrow \vec{s}^T A \vec{s} = 1^2 + (-1)^2 - 1^2 - 1^2 = 0$ ✓

b) $g := PQ : \vec{x} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{q}$; $X(\vec{x}) \in B \;\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{x}^T A \vec{x} = (\lambda \vec{p} + \mu \vec{q})^T A (\lambda \vec{p} + \mu \vec{q}) =$

$= \lambda^2 \underbrace{\vec{p}^T A \vec{p}}_{=0 \text{ nach a)}} + 2\lambda\mu \underbrace{\vec{p}^T A \vec{q}}_{=0 \text{ NR}} + \mu^2 \underbrace{\vec{q}^T A \vec{q}}_{=0 \text{ nach a)}} = 0$ ✓

NR: $\vec{p}^T A \vec{q} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 0$ ✓

d.h. Die beiden Quadrikpunkte P und Q liegen bzgl B zueinander polar!

$h := RS : \vec{x} = \sigma \vec{r} + \tau \vec{s}$; $X(\vec{x}) \in B \;\forall\, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \vec{x}^T A \vec{x} = (\sigma \vec{r} + \tau \vec{s})^T A (\sigma \vec{r} + \tau \vec{s}) =$

$= \sigma^2 \underbrace{\vec{r}^T A \vec{r}}_{=0 \text{ nach a)}} + 2\sigma\tau \underbrace{\vec{r}^T A \vec{s}}_{=0 \text{ NR}} + \tau^2 \underbrace{\vec{s}^T A \vec{s}}_{=0 \text{ nach a)}} = 0$ ✓

NR: $\vec{r}^T A \vec{s} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$ ✓

c) Seien $G(\vec{g})$ und $H(\vec{h})$ Punkte mit $\vec{g} := \lambda \vec{p} + \mu \vec{q}$ und $\vec{h} := \sigma \vec{r} + \tau \vec{s}$ mit $\begin{matrix} \sigma = \lambda - \mu \\ \tau = \lambda + \mu \end{matrix}$ (*) Wir zeigen:

Dann liegen alle Punkte von $GH : \vec{x} = \alpha \vec{g} + \beta \vec{h}$ auf B.

denn

$$\vec{x}^T A \vec{x} =$$

$$= \left[\alpha(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q})+\beta(\sigma\vec{r}+\tau\vec{s})\right]^T A \left[\alpha(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q})+\beta(\sigma\vec{r}+\tau\vec{s})\right]$$

$$= \alpha^2 \underbrace{(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q})^T A(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q})}_{=0 \text{ nach b)}} + 2\alpha\beta(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q})^T A(\sigma\vec{r}+\tau\vec{s})$$

$$+ \beta^2 \underbrace{(\sigma\vec{r}+\tau\vec{s})^T A(\sigma\vec{r}+\tau\vec{s})}_{=0 \text{ nach b)}}$$

$$= 2\alpha\beta\Big[\underset{NR}{\lambda\sigma}\underbrace{\vec{p}^T A\vec{r}}_{=2} + \lambda\tau\underbrace{\vec{p}^T A\vec{s}}_{=-2} + \mu\sigma\underbrace{\vec{q}^T A\vec{r}}_{=2} + \mu\tau\underbrace{\vec{q}^T A\vec{s}}_{=2}\Big]$$

$$= 4\alpha\beta\left[\sigma(\lambda+\mu)-\tau(\lambda-\mu)\right] \overset{(*)}{=} 4\alpha\beta\left[\sigma\cdot\tau-\tau\cdot\sigma\right] = 0 \checkmark$$

NR: $\vec{p}^T A\vec{r} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 = 2$

$\vec{p}^T A\vec{s} = 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = -2$

$\vec{q}^T A\vec{r} = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 - 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 1 = 2$

$\vec{q}^T A\vec{s} = 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) - 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1 = 2$

d) Tangentenebene von $\mathcal{B}$ in $T(\vec{t}) \in \mathcal{B}$: $\vec{t}^T A\vec{x} = 0$

$\Leftrightarrow \quad t_0x_0 + t_1x_1 - t_2x_2 - t_3x_3 = 0$ mit $\vec{t}^T A\vec{t} = 0 \quad (**)$

① Schnitt mit g: $\vec{x} = \lambda\vec{p}+\mu\vec{q} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\ \lambda-\mu\\ \lambda+\mu\\ \lambda-\mu\end{pmatrix}$:

$$0 = t_0(\lambda+\mu)+t_1(\lambda-\mu)-t_2(\lambda+\mu)-t_3(\lambda-\mu) =$$

$$= \lambda(t_0+t_1-t_2-t_3)+\mu(t_0-t_1-t_2+t_3)$$

$$\Leftrightarrow \text{ o.E.} \left\{\begin{array}{l}\lambda = t_0-t_1-t_2+t_2\\ \mu = -(t_0+t_1-t_2-t_3)\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Schnittpunkt } S_g(\vec{s}_g) \text{ mit}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{homo. Faktor}}}{2}\cdot\vec{s}_g := (t_0-t_1-t_2+t_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - (t_0+t_1-t_2-t_3)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2t_1+2t_3\\ 2t_0-2t_2\\ -2t_1+2t_3\\ 2t_0-2t_2\end{pmatrix} = 2\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}t_3-t_1\\ t_0-t_2\\ t_3-t_1\\ t_0-t_2\end{pmatrix}}_{=\vec{s}_g}$$

② Schnitt mit h: $\vec{x} = \sigma\vec{r}+\tau\vec{s} = \begin{pmatrix}\sigma+\tau\\ \sigma-\tau\\ -\sigma+\tau\\ \sigma+\tau\end{pmatrix}$

$$0 = t_0(\sigma+\tau)+t_1(\sigma-\tau)-t_2(-\sigma+\tau)-t_3(\sigma+\tau) =$$

$$= \sigma(t_0+t_1+t_2-t_3)+\tau(t_0-t_1-t_2-t_3)$$

$$\Leftrightarrow \text{o.E.} \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \underline{t_0 - t_1 - t_2 - t_3} \\ \tau = -\underline{(t_0 + t_1 + t_2 - t_3)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Schnittpunkt } S_h(\vec{s}_h) \text{ mit}$$

$$2 \cdot \vec{s}_h := (t_0 - t_1 - t_2 - t_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - (t_0 + t_1 + t_2 - t_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_1 - 2t_2 \\ 2t_0 - 2t_3 \\ -2t_0 + 2t_3 \\ -2t_1 - 2t_2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -t_1 - t_2 \\ t_0 - t_3 \\ -t_0 + t_3 \\ -t_1 - t_2 \end{pmatrix}}_{= \vec{s}_h}$$

homo. Faktor

③ Wir zeigen: $\underline{S_g S_h \subset B} \Leftrightarrow \vec{x} = \alpha \vec{s}_g + \beta \vec{s}_h$ erfüllt:

$$0 = \vec{x}^T A \vec{x} = (\alpha \vec{s}_g + \beta \vec{s}_h)^T A (\alpha \vec{s}_g + \beta \vec{s}_h) =$$

$$= \alpha^2 \underbrace{\vec{s}_g^{\,T} A \vec{s}_g}_{= 0 \text{ nach b)}} + 2\alpha\beta\, \vec{s}_g^{\,T} A \vec{s}_h + \beta^2 \underbrace{\vec{s}_h^{\,T} A \vec{s}_h}_{= 0 \text{ nach b}} = 2\alpha\beta\, \vec{s}_g^{\,T} A \vec{s}_h =$$

$$= 2\alpha\beta\left[(t_3 - t_1)(-t_1 - t_2) + (t_0 - t_2)(t_0 - t_3) - (t_3 - t_1)(-t_0 + t_3) - (t_0 - t_2)(-t_1 - t_2)\right]$$

$$= 2\alpha\beta\left[-\cancel{t_1 t_3} + t_1^2 - \cancel{t_2 t_3} + \cancel{t_1 t_2} + t_0^2 - \cancel{t_0 t_2} - \cancel{t_0 t_3} + \cancel{t_2 t_3} + \right.$$

$$\left. + \cancel{t_0 t_3} - \cancel{t_0 t_1} - t_3^2 + \cancel{t_1 t_3} + \cancel{t_0 t_1} - \cancel{t_1 t_2} + \cancel{t_0 t_2} - t_2^2\right] =$$

$$= 2\alpha\beta\left[t_0^2 + t_1^2 - t_2^2 - t_3^2\right] = 0 \quad \text{da } T \in B \ ✓ \ \text{vgl. } (**)$$

④ Wir zeigen: $\underline{T \in S_g S_h} \Leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta, \gamma: \ \alpha \vec{s}_g + \beta \vec{s}_h = \gamma \cdot \vec{t}$

Betrachte 1. und 2. Zeile $\Rightarrow$ CRAMER

$$\alpha \begin{pmatrix} t_3 - t_1 \\ t_0 - t_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -t_1 - t_2 \\ t_0 - t_3 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \wedge B = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \right]$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} t_0 & -t_1 - t_2 \\ t_1 & t_0 - t_3 \end{vmatrix} = t_0^2 - t_0 t_3 + t_1^2 - t_1 t_2$$

$$\beta = \begin{vmatrix} t_3 - t_1 & t_0 \\ t_0 - t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1 t_3 - t_1^2 - t_0^2 + t_0 t_2$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} t_3 - t_1 & -t_1 - t_2 \\ t_0 - t_2 & t_0 - t_3 \end{vmatrix} = \underline{-t_3^2} + t_0 t_3 + t_1 t_3 - t_1 t_2 \underline{- t_2^2} + t_0 t_2$$

$(t_0^2 + t_1^2 - t_2^2 - t_3^2 = 0)$ $$= \underline{-t_0^2} \underline{- t_1^2} + t_0 t_3 + t_1 t_3 - t_1 t_2 + t_0 t_2$$

vereinfacht die Rechnung

Überprüfe 3. und 4. Zeile:

$$\alpha(t_3 - t_1) + \beta(t_3 - t_0) - \gamma t_2 = \dots = (t_0 - t_1) \cdot \underbrace{(t_0^2 + t_1^2 - t_2^2 - t_3^2)}_{= 0 \text{ vgl. } (**)} = 0 \ ✓$$

$$\alpha(t_0 - t_2) + \beta(-t_1 - t_2) - \gamma t_3 = \dots = (t_0 + t_1) \cdot (t_0^2 + t_1^2 - t_2^2 - t_3^2) = 0 \ ✓$$

e) $\pi: \vec{x}' = U\vec{x}$ vertauscht nur die beiden letzten Koordinaten, ändert also die Quadrikgleichung nicht, bildet also Quadrikpunkte auf Quadrikpunkte ab!
Das Bild v' der Verbindungsgeraden von $\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}$ mit $\sigma\vec{r}+\tau\vec{s}$ ist gegeben durch

$$\vec{x}' = \alpha(\lambda U\vec{p}+\mu U\vec{q})+\beta(\sigma U\vec{r}+\tau U\vec{q}) \text{ mit } \begin{matrix}\sigma = \lambda-\mu\\ \tau = \lambda+\mu\end{matrix} \ (*)$$

$$= \alpha\begin{pmatrix}\lambda+\mu\\ \lambda-\mu\\ \lambda-\mu\\ \lambda+\mu\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\sigma+\tau\\ \sigma-\tau\\ \sigma+\tau\\ -\sigma+\tau\end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \alpha\cdot\begin{pmatrix}\lambda+\mu\\ \lambda-\mu\\ \lambda-\mu\\ \lambda+\mu\end{pmatrix} + \beta\cdot\begin{pmatrix}2\lambda\\ -2\mu\\ 2\lambda\\ 2\mu\end{pmatrix}$$

$\exists\,\alpha,\beta,\gamma,\delta:\ \vec{x}' = \vec{x}$

und schneidet die Gerade $g = PQ: \vec{x} = \gamma\vec{p}+\delta\vec{q}$ $\Leftrightarrow$

$$0 = \det\begin{pmatrix}\cancel{\lambda}+\mu & 2\lambda & 1 & 1\\ \cancel{\lambda}-\mu & -2\mu & 1 & -1\\ \cancel{\lambda}-\mu & 2\lambda & 1 & 1\\ \cancel{\lambda}+\mu & 2\mu & 1 & -1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2\mu & 2\lambda & 1 & 2\\ 0 & -2\mu & 1 & 0\\ 0 & 2\lambda & 1 & 2\\ 2\mu & 2\mu & 1 & 0\end{pmatrix} =$$

$-\lambda\cdot$ $\quad +\mu\cdot$ $\quad +1\cdot$ $\qquad -\lambda\cdot$ $\quad -\tfrac{1}{2}\cdot$

$$= \det\begin{pmatrix}2\mu & 0 & 0 & 2\\ 0 & -2\mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 2\mu & 2\mu & 1 & 0\end{pmatrix} \ -1\cdot \ = \det\begin{pmatrix}2\mu & 0 & 0 & 2\\ 0 & -2\mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 2\mu & 4\mu & 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= -\det\begin{pmatrix}2\mu & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 2\mu & 4\mu & 0\end{pmatrix} = 8\mu^2 \Leftrightarrow \mu = 0 \Rightarrow$$

Für $\mu \neq 0$ gilt: $v' \cap g = \emptyset \Rightarrow$ Beh.

Für $\mu = 0$ gilt: $v': \vec{x}' = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}}_{=\vec{p}+\vec{q}} = (\alpha+\beta)\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\vec{p}} + \beta\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{q}}$

d.h. $v' = g$

wegen $\underbrace{g \cap h = \emptyset}$ folgt auch für $\mu = 0$ die Beh.

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix} = 4\cdot\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix} = +8 \neq 0$$

f) Durch jeden Punkt von B geht eine Gerade nach d) und das Bild einer Geraden nach e) $\Rightarrow$ Beh.