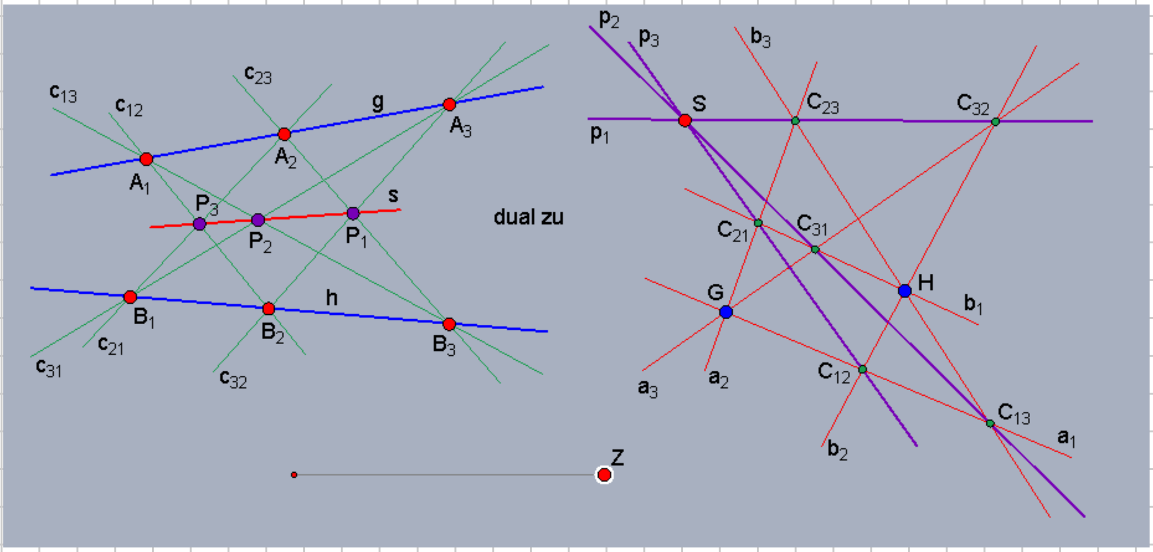
WS 2010/11 Geometrie 1 LB Übungen Blatt 10

Notiztitel 11.01.2011

T24



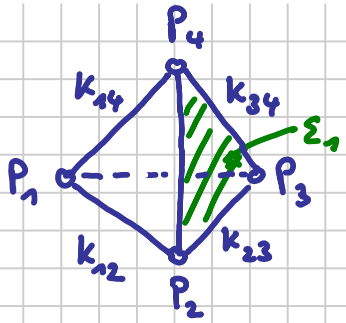
Punkt A auf Gerade g — Gerade a durch Punkt G

Verbindungsgerade $c = A + B$ $\xleftrightarrow{\text{dual zu}}$ Schnittpunkt $C = a \wedge b$

Axiom von Pappos	duale Aussage von Pappos
Gegeben seien zwei Geraden g und h sowie je 3 Punkte A_i auf g, B_i auf h $(i=1,2,3)$. Dann gilt: Die Schnittpunkte P_k $(1 \le k \le 3)$ der Verbindungsgeraden $c_{ij} = A_i + B_j$ und $c_{ji} = A_j + B_i$ $(1 \le i,j \le 3,\ i \ne j \ne k \ne i)$ liegen kollinear (auf einer Geraden S)	Gegeben seien zwei Punkte G und H sowie je 3 Geraden a_i durch G, b_i durch H. Dann gilt: Die Verbindungsgeraden p_k $(1 \le k \le 3)$ der Schnittpunkte $C_{ij} = a_i \wedge b_j$ und $C_{ji} = a_j \wedge b_i$ $(1 \le i,j \le 3,\ i \ne j \ne k \ne i)$ sind kopunktal (schneiden einander in einem Punkt S)

<u>Bemerkung</u>: Die beiden Figuren haben gleich viele Punkte wie Geraden (9 Punkte / 9 Geraden) und sehen letztlich „gleich" aus. Die Aussagen sind aber unterschiedlich.

T25.



Jedes Tetraeder $P_1P_2P_3P_4$ ($P_1 \dots P_4$ nicht komplanar) besitzt im euklidischen Raum eine Umkugel:

$$\Sigma: (x-m_x)^2+(y-m_y)^2+(z-m_z)^2=r^2 \quad 1)$$

In homo. Koord. $\Sigma: \vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A^T = A, \det A \neq 0$

Punkte $P(\vec{p}), Q(\vec{q})$ sind polar zueinander $\Leftrightarrow p^T A \vec{q} = 0$

Vorlesung:

$\Rightarrow$ Zum Punkt $P(\vec{p})$ sind alle Punkte $X(\vec{x})$ polar mit $\vec{p}^T A \vec{x} = 0$ Polar(hyper)ebene zu P mit homo. (Hyper-)ebenenkoord. $\vec{u} = A\vec{p} \neq \vec{o}$ (da $\det A \neq 0$). Umgekehrt ist zur Hyperebene $\pi: \vec{u}^T\vec{x} = 0$ der Punkt $P(A\vec{u})$ polar. Liegt P auf Σ, dann ist seine Polar(hyper)ebene die Tangenten(hyper)ebene an Σ.

Realisiert man das Dualitätsprinzip mittels der Polarität zur Umkugel, so gilt: $(1 \leq i \leq 4)$

- Die Ecke P_i ist dual zur Tangentenebene τ_{P_i} an Σ in P_i
- Die Kante $k_{ij} = P_i + P_j$ ist dual zur Schnittgeraden $s_{ij} = \tau_{P_i} \cap \tau_{P_j}$
- Die Verbindungsebene $\varepsilon_i = P_j + P_k + P_\ell$ (gegenüber von P_i) ist dual zum Schnittpunkt $E_i = \tau_{P_j} \cap \tau_{P_k} \cap \tau_{P_\ell}$, der somit auf den Schnittgeraden $s_{jk}, s_{j\ell}, s_{k\ell}$ liegt.

$\Rightarrow$ Das duale Gebilde eines Tetraeders ist ein Tetraeder mit den vier Ecken E_1, E_2, E_3, E_4, den sechs Kanten $s_{ij} = E_i + E_j = \tau_{P_i} \cap \tau_{P_j}$ und vier Dreiecken $\Delta E_i E_j E_k$ in τ_{P_ℓ}

Ein reguläres Tetraeder besitzt vier kongruente gleichseitige Dreiecke als Seitenflächen. Sein duales Gegenstück ist ebenfalls ein reguläres Tetraeder.

Man sagt: Das Tetraeder ist selbstdual.

1) $P_i \in \Sigma \Leftrightarrow (\vec{p_i}-\vec{m})^T(\vec{p_i}-\vec{m}) = r^2 \Leftrightarrow \vec{p_i}^T\vec{p_i} - 2\vec{p_i}\vec{m} + \vec{m}^T\vec{m} = r^2$

Differenzbildung: $2(\vec{p}_i-\vec{p}_4)^T\vec{m} = \vec{p}_i^T\vec{p}_i - \vec{p}_4^T\vec{p}_4 \quad (1 \le i \le 3)$ [2])

liefert LGS für $\vec{m}$ (eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \vec{p}_1-\vec{p}_4, \vec{p}_2-\vec{p}_4, \vec{p}_3-\vec{p}_4$ lu)

r mit $\vec{m}$ aus einer der Gleichungen! d.h. P_1, P_2, P_3, P_4 nicht komplanar

[2]) Gleichung der Mittellotebene von P_1 und P_4!

T26. g, h windschief $\Rightarrow g \cap h = \emptyset$

$P(\vec{p}), Q(\vec{q}), R(\vec{r}), S(\vec{s}) \in h$ $\Big\} \Rightarrow P, Q, R, S \notin g$

$\Rightarrow \pi := P+g,\ \psi := Q+g,\ \rho := R+g,\ \sigma := S+g$ sind Ebenen in P^3

o.E. $\begin{array}{l}\vec{r} = \lambda_r\vec{p} + \mu_r\vec{q} \\ \vec{s} = \lambda_s\vec{p} + \mu_s\vec{q}\end{array}$ $(*)$ $\overset{T22}{\Rightarrow}$ $DV(P,Q,R,S) = \dfrac{\mu_r}{\lambda_r} : \dfrac{\mu_s}{\lambda_s}$ $(**)$

Seien $U(\vec{u})$ und $V(\vec{v})$ zwei verschiedene beliebige Punkte auf g

Dann gilt: $\vec{x} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{u} + \nu\cdot\vec{v}$ d.h. $\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$ lin. abhängig

$X \in \pi \Leftrightarrow 0 = |\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}| = \vec{u}_\pi^T\vec{x}$

$X \in \psi \Leftrightarrow 0 = |\vec{q}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}| = \vec{u}_\psi^T\vec{x}$

$X \in \rho \Leftrightarrow 0 = |\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}| = \vec{u}_\rho^T\vec{x}$

$X \in \sigma \Leftrightarrow 0 = |\vec{s}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}| = \vec{u}_\sigma^T\vec{x}$

Ebenengleichungen mit hom. Ebenenkoordinaten $\vec{u}_\pi, \vec{u}_\psi, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\sigma$

Det. Umformung

$(*) \Rightarrow 0 = \vec{u}_\rho^T\vec{x} = |\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}| = |\lambda_r\vec{p} + \mu_r\vec{q}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}| =$

$= \lambda_r|\vec{p}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}| + \mu_r|\vec{q}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{x}| = \lambda_r\vec{u}_\pi^T\vec{x} + \mu_r\vec{u}_\psi^T\vec{x}$

$= (\lambda_r\vec{u}_\pi + \mu_r\vec{u}_\psi)^T\vec{x} \Rightarrow \underline{\vec{u}_\rho = \lambda_r\vec{u}_\pi + \mu_r\vec{u}_\psi}$

analog: $\underline{\vec{u}_\sigma = \lambda_s\vec{u}_\pi + \mu_r\vec{u}_\psi}$

Offenbar haben die homo. Punktkoord. von P, Q, R, S dieselben Beziehungen wie die homo. Ebenenkoord. von π, ψ, ρ, σ

$\Rightarrow DV(\pi, \psi, \rho, \sigma) = \dfrac{\mu_r}{\lambda_r} : \dfrac{\mu_s}{\lambda_s} \overset{!}{\underset{(**)}{=}} DV(P, Q, R, S)$

mittels der homo. Ebenenkoord und T22