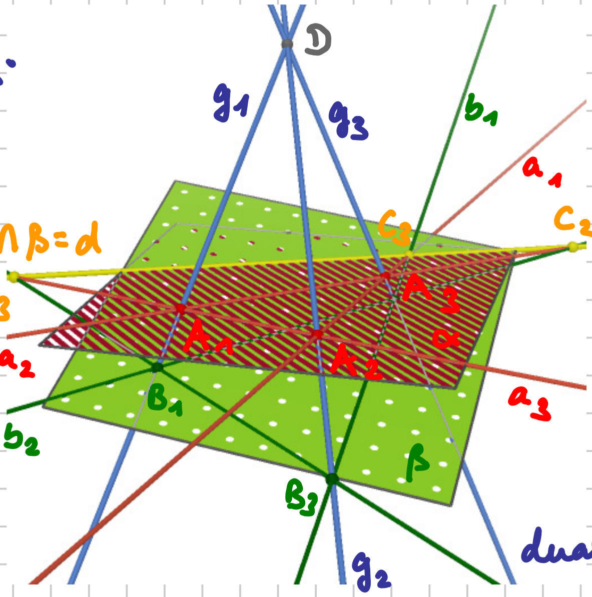
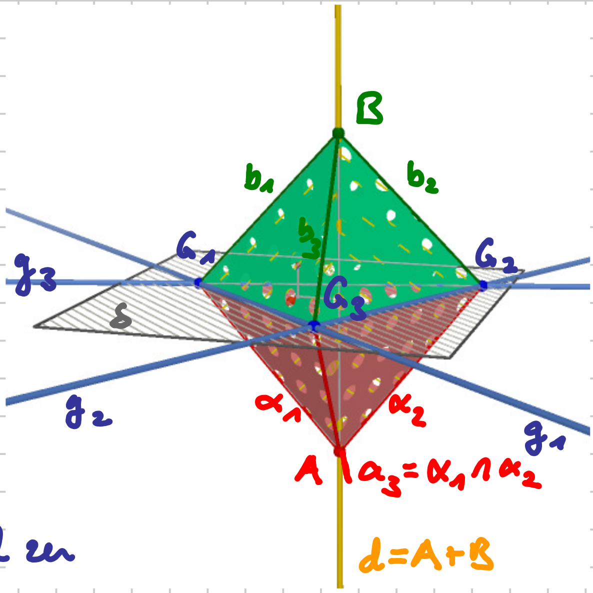
WS 2010/11 Geometrie 1 LB Blatt 10 Hausaufgaben

Notiztitel 11.01.2011

H21.



dual zu



Punkt D $\leftrightarrow$ Ebene δ

Gerade g_i $\leftrightarrow$ Gerade g_i

Punkt $A_i \in g_i$ $\leftrightarrow$ Ebene α_i durch g_i

Verbind.-Ebene $\gamma_3 = g_1 + g_2$ $\leftrightarrow$ Schnitt-Punkt $G_3 = g_1 \cap g_2$

Verbind.-Gerade $a_3 = A_1 + A_2$ $\leftrightarrow$ Schnitt-Gerade $a_3 = \alpha_1 \cap \alpha_2$

Desargues in P^3

Seien g_1, g_2, g_3 drei paarweise verschiedene Geraden durch einen Punkt D, die nicht in einer Ebene liegen. (nicht komplanar)

A_i, B_i seien Punkte auf g_i $(i = 1, 2, 3)$. Dann liegen die drei Schnittpunkte

$D_k = (\underbrace{A_i + A_j}_{= a_k}) \cap (\underbrace{B_i + B_j}_{= b_k})$

$(1 \leq i, j, k \leq 3,\ i, j, k$ paarweise verschieden$)$ entsprechender Verbindungsgeraden auf einer Geraden d.

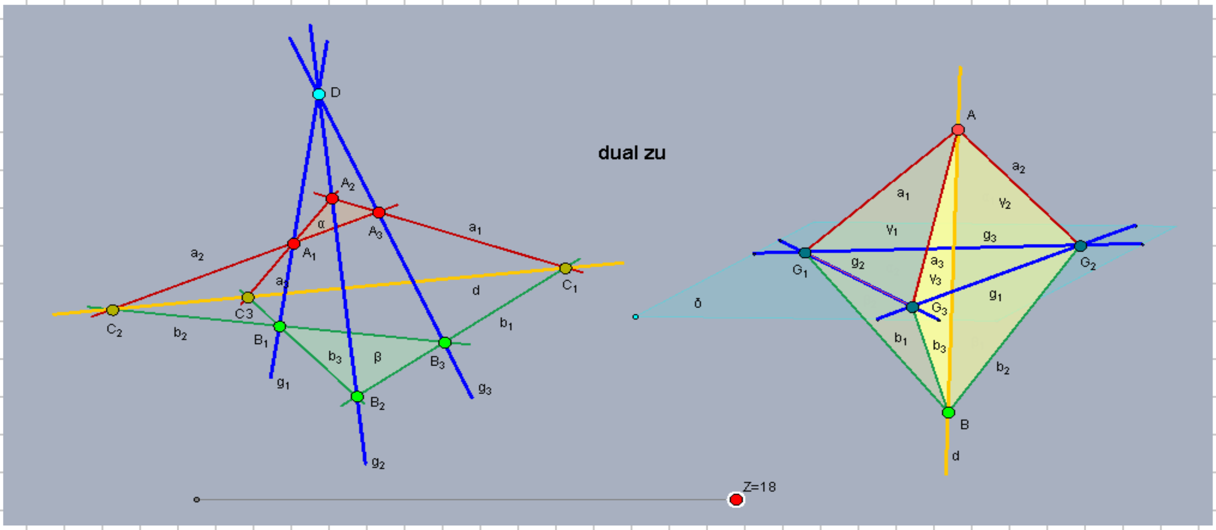
duale Aussage in P^3

Seien g_1, g_2, g_3 drei paarweise verschiedene Geraden, die in einer Ebene δ liegen, aber einander nicht schneiden (nicht kopunktal)

α_i, β_i seien Ebenen durch g_i $(i = 1, 2, 3)$. Dann schneiden sich die drei Verbindungsebenen

$\delta_k = (\underbrace{\alpha_i \cap \alpha_j}_{= a_k}) + (\underbrace{\beta_i + \beta_j}_{= b_k})$

$(1 \leq i, j, k \leq 3,\ i, j, k$ paarweise verschieden$)$ entsprechender Verbindungsebenen in einer Geraden d.

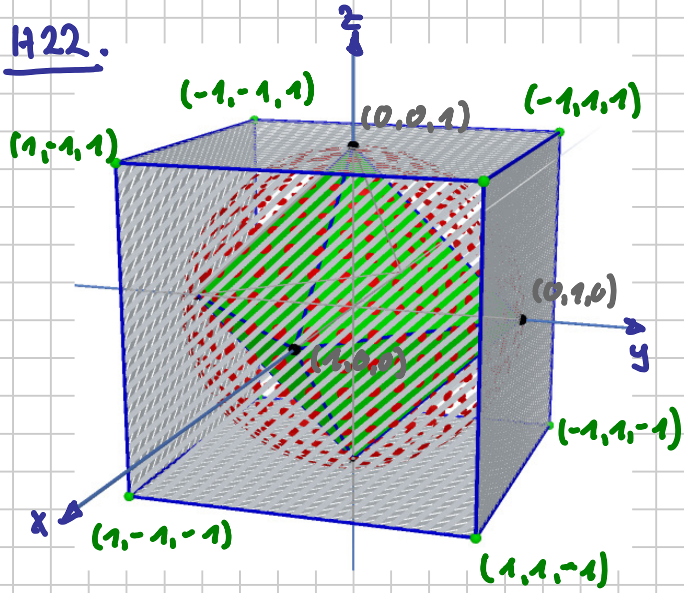


Bem. $A_1+A_2+A_3=\alpha \quad \longleftrightarrow \quad \alpha_1\cap\alpha_2\cap\alpha_3=A$

$B_1+B_2+B_3=\beta \quad \longleftrightarrow \quad \beta_1\cap\beta_2\cap\beta_3=B$

$d=\alpha\cap\beta \quad \longleftrightarrow \quad d=A+B$

H22.



Würfel mit 8 Ecken $(\pm1,\pm1,\pm1)$. Die Inkugel um $(0,0,0)$ mit Radius 1 berührt die 6 Seitenflächen (Quadrate) des Würfels in den 6 Punkten $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$ und $(0,0,\pm1)$, den Polen der Seitenflächen bzgl. der Polarität des Würfels zu seiner Inkugel.

Den 12 Kanten des Würfels als Schnittgeraden seiner Seitenflächen sind die 12 Verbindungsstrecken entsprechender Berührpunkte dual zugeordnet.

Dabei erhält man 8 Dreiecke, die offenbar gleichseitig*) sind und polar (dual) zu den 8 Eckpunkten des Würfels liegen.

Insofern ist dem Würfel ein reguläres Oktaeder dual mit 8 Seitenflächen (gleichseitigen Dreiecken), 12 Kanten und 6 Ecken.

*) Kantenlänge jeweils $\sqrt{2}=\left\|\begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\\0\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}\pm1\\0\\\pm1\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}0\\\pm1\\\pm1\end{pmatrix}\right\|$.