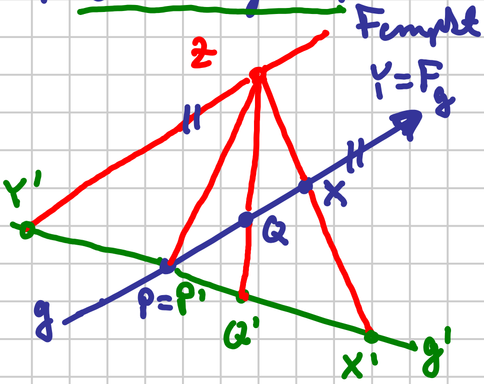
WS 2010/11 Geometrie 1LB Übungen Blatt 9

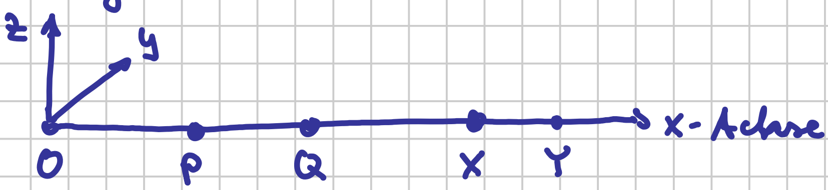
Notiztitel 17.12.2010

T22 1) Zur Herleitung der Formel seien o.E. P, Q, X, Y eigentliche Punkte, d.h. $p_0 \cdot q_0 \cdot x_0 \cdot y_0 \neq 0$, denn es gilt:

Falls einer der Punkte ein Fernpunkt ist, z.B. $y_0 = 0$, dann gibt es eine Zentralprojektion $\kappa_Z : g \to g' = \kappa_Z(g)$ derart, dass P', Q', X', Y' eigentliche Punkte sind und es gilt: $DV(P,Q,X,Y) = DV(P',Q',X',Y')$



2) Wähle das Koordinatensystem o.E. zunächst so, dass g die x-Achse ist.



$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

← o.E. $x_0 = 1$ gewählt

$$DV(P,Q,X,Y) = \frac{\overrightarrow{PX}}{\overrightarrow{QX}} : \frac{\overrightarrow{PY}}{\overrightarrow{QY}} = \frac{x_1 - p_1}{x_1 - q_1} : \frac{y_1 - p_1}{y_1 - q_1} = \frac{p_1 - x_1}{q_1 - x_1} : \frac{p_1 - y_1}{q_1 - y_1}$$

mit orientierten Strecken

mit Determinanten:
$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & p_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & q_1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & p_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & q_1 \end{vmatrix}}$$

Andererseits gilt $\vec{x} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{q}$ (Punkt auf $g = PQ$!)

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \end{pmatrix} \cdot \lambda + \begin{pmatrix} 1 \\ q_1 \end{pmatrix} \cdot \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

LGS Lösung nach CRAMER

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & q_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}}, \quad \mu = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}}$$

bzw. $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} q_1 & -1 \\ -p_1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{inv. Matrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\lambda} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & p_1 \end{vmatrix}}{\underset{\sim\sim\sim\sim}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & q_1 \end{vmatrix}}}$$ ist 1. Faktor in DV bis auf Vorzeichen.

Analog folgt für $\vec{y} = \sigma \vec{p} + \tau \vec{q}$ (Punkt auf $g = PQ$!)

Vertausche x und y !

$$\Rightarrow \frac{\tau}{\sigma} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & p_1 \end{vmatrix}}{\underline{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & q_1 \end{vmatrix}}}$$ ist 2. Faktor in DV bis auf Vorzeichen

$\Rightarrow (*)$ $\boxed{DV(P, Q, X, Y) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\tau}{\sigma}}$ mit den (homogenen) Linearfaktoren (λ, μ) bzw (σ, τ) von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ bzgl. $\vec{p}$ und $\vec{q}$.

(homogenisierender Faktor kürzt sich im Bruch $\frac{\mu}{\lambda}$ bzw $\frac{\tau}{\sigma}$ weg!)

3) Bezüglich irgendeiner Projektivität $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit $\det A \neq 0$ gilt $A\vec{x} = \lambda A\vec{p} + \mu A\vec{q}$ bzw. $A\vec{y} = \sigma A\vec{p} + \tau A\vec{q}$

mit denselben (homogenen) Linearfaktoren (λ, μ) und (σ, τ) die jetzt aber auch aus 2 der 4 Gleichungen von

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

berechnet werden können, sofern keine der Determinanten verschwindet ohne dass die Punkte identisch sind.

CRAMER

$$\Rightarrow \frac{\mu}{\lambda} = -\frac{\begin{vmatrix} x_i & p_i \\ x_k & p_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & q_i \\ x_k & q_k \end{vmatrix}} \text{ bzw. } \frac{\tau}{\sigma} = -\frac{\begin{vmatrix} y_i & p_i \\ y_k & p_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_i & q_i \\ y_k & q_k \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow DV(P, Q, X, Y) \overset{(*)}{=} \frac{\begin{vmatrix} x_i & p_i \\ x_k & p_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & q_i \\ x_k & q_k \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} y_i & p_i \\ y_k & p_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_i & q_i \\ y_k & q_k \end{vmatrix}}$$

sofern auftretende Determinanten nur dann verschwinden wenn Punkte identisch sind.

Die Projektive Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ macht alle in 1) bzw 2) gemachten Einschränkungen rückgängig, d.h. die Formel gilt für beliebige Geraden wie auch im Fall von Fernpunkten.

T23. In der projektiv erweiterten euklidischen Ebene betrachten wir den Kreis $k: x^2+y^2-1=0 \rightarrow x_0^2-x_1^2-x_2^2=0$ und eine Gerade $g: a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$ in homog. Koord.

$(a_0,a_1,a_2) \neq (0,0,0)$

Die Abbildung

mind. einer der 3 Fälle tritt ein!

$y_0 = a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2$

$y_1=x_1$, $y_2=x_2$ falls $a_0 \neq 0$ bzw. $y_1=x_0$, $y_2=x_2$ falls $a_1\neq 0$ oder $y_1=x_0$, $y_2=x_1$ falls $a_2 \neq 0$

mit $\vec{y}=\mathcal{U}\vec{x}$ hat dann $\det \mathcal{U}\neq 0$ ist also eine proj. Abb., die die Gerade g auf die Ferngerade $y_0=0$ abbildet!

Andererseits liefert $\vec{x}=\mathcal{U}^{-1}\vec{y}$ eingesetzt in eine Kegelschnittgleichung: $\vec{x}^T A\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{y}^T\underbrace{(\mathcal{U}^{-1})^T A\,\mathcal{U}^{-1}}_{B}\vec{y}=0$ offenbar wieder einen Kegelschnitt.

(mit $B^T=B$ und $\det B=\det A\neq 0$)

Damit gilt:

1) Schneidet g den Kreis k in 2 Punkten, so hat das Bild k' unter obiger Abb. 2 Fernpunkte: speziell $g: x_1=0$

$y_0=x_1,\ y_1=x_0,\ y_2=x_2 \Leftrightarrow x_0=y_1,\ x_1=y_0,\ x_2=y_2$

$\Rightarrow k': y_1^2-y_0^2-y_2^2=0 \Leftrightarrow \big(\underbrace{\tfrac{y_1}{y_0}}_{=x'}\big)^2-1-\big(\underbrace{\tfrac{y_2}{y_0}}_{=y'}\big)^2=0$

$\Leftrightarrow x'^2-y'^2=1$ eine Hyperbel

2) Trifft g den Kreis k in genau 1 Punkt (Tgte), so hat das Bild k' unter obiger Abb. 1 Fernpunkt: speziell $g: x_0-x_2=0$

$y_0=x_0-x_2,\ y_1=x_1,\ y_2=x_2 \Leftrightarrow x_0=y_0+y_2,\ x_1=y_1,\ x_2=y_2$

$\Rightarrow k': (y_0+y_2)^2-y_1^2-y_2^2=0 \Leftrightarrow y_0^2+2y_0y_2+\cancel{y_2^2}-y_1^2-\cancel{y_2^2}=0$

$\Leftrightarrow 1+2\big(\underbrace{\tfrac{y_2}{y_0}}_{=y'}\big)-\big(\underbrace{\tfrac{y_1}{y_0}}_{=x'}\big)^2=0 \Leftrightarrow 2y'=x'^2-1$ eine Parabel

2) Trifft g den Kreis nicht, so ist das Bild i.a. eine Ellipse