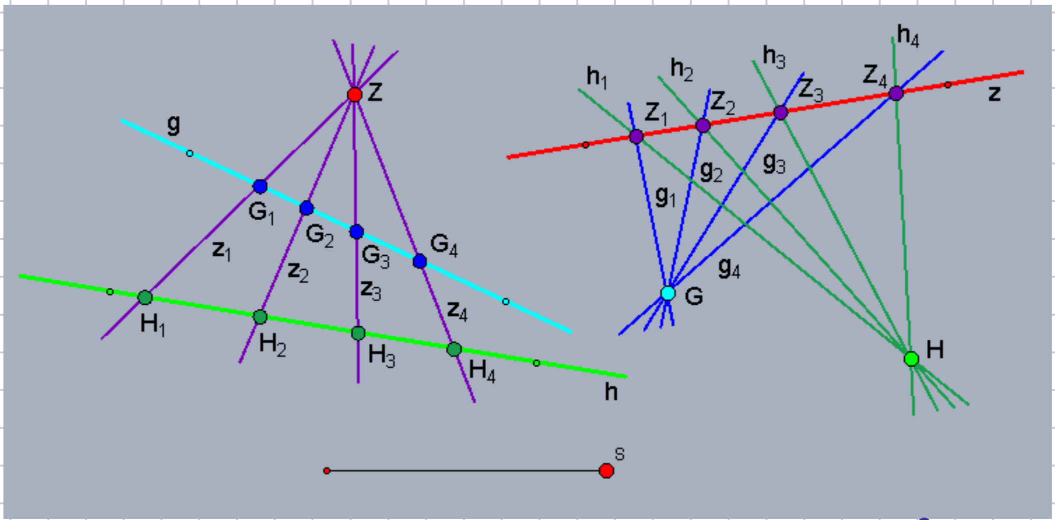
WS2010/11 Geometrie 1 LB Blatt 9 Hausaufgaben

Notiztitel 17.12.2010

H19.



Punkt $G_i = g \wedge z_i$ Schnitt — dual zu ⟷ — Gerade $g_i = G + Z_i$ Verbindung

Gerade $G_i \in g$ — Punkt $G \in g_i$

a) **Satz S**

Seien g, h zwei verschiedene Geraden und Z ein Punkt mit $Z \notin g \cup h$.
Seien weiter z_1, z_2, z_3, z_4 vier Geraden durch Z (paarweise verschieden), die g in den Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 und h in den Punkten H_1, H_2, H_3, H_4 schneiden. Dann gilt:

$DV(G_1 G_2 G_3 G_4) = DV(H_1 H_2 H_3 H_4)$

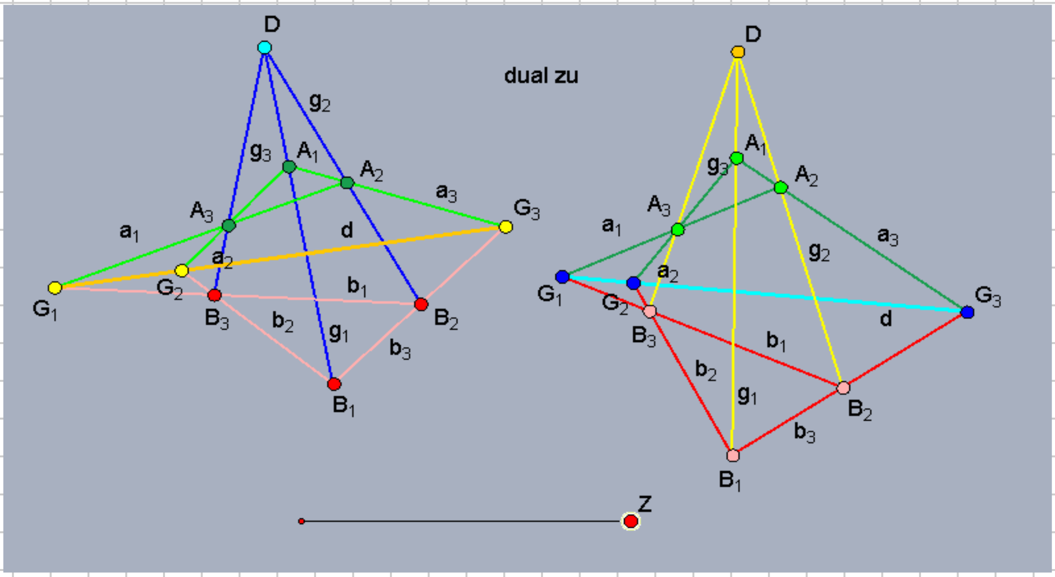
Satz S'

Seien G, H zwei verschiedene Punkte und z eine Gerade mit $G, H \notin z$.
Seien weiter Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 vier Punkte auf z (paarweise verschieden), deren Verbindungsgeraden mit G mit g_1, g_2, g_3, g_4 und mit H mit h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet werden. Dann gilt:

$DV(g_1 g_2 g_3 g_4) = DV(h_1 h_2 h_3 h_4)$

b) Die Gültigkeit von Satz S' folgt aus der von Satz S, da die Aussage S' durch Dualisieren von Schnitt von Geraden oder Verbindung von Punkten erhalten wird.

H20



Desargues in P^2 (projektiv):

Seien g_1, g_2, g_3 drei Geraden durch einen Punkt D (paarw. versch.) Seien weiter A_i, B_i Punkte auf der Geraden g_i $(i=1,2,3)$. Dann liegen die Schnittpunkte $a_j \cap b_j$ entsprechender Verbindungsgeraden $a_j := A_i + A_k$, $b_j = B_i + B_k$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ auf einer Geraden d.

duale Aussage:

Seien G_1, G_2, G_3 drei Punkte auf einer Geraden d (paarw. versch.) Seien weiter a_i, b_i Geraden durch den Punkt G_i $(i=1,2,3)$. Dann gehen die Verbindungsgeraden $A_j + B_j$ entsprechender Schnittpunkte $A_j := a_i \cap a_k$, $B_j = b_i \cap b_k$ $(i \neq j \neq k \neq i)$ durch einen Punkt D.

b) Man erhält wieder die Figur zum Satz von Desargues aber in umgekehrter Reihenfolge! D.h. die duale Aussage ist eine Art Umkehrung.

c) Seien g_1, g_2, g_3 drei paarweise verschiedene Geraden in P^2, $A_i \neq B_i$ Punkte auf g_i und $A_i + A_k =: a_j$, $B_i + B_k =: b_k$ sowie $G_j = a_j \cap b_j$ $(1 \leq i,j,k \leq 3,\ i \neq j \neq k \neq i)$ Dann gilt:

Die Geraden g_1, g_2, g_3 gehen durch einen Punkt D genau dann wenn die Punkte G_1, G_2, G_3 auf einer Geraden d liegen.