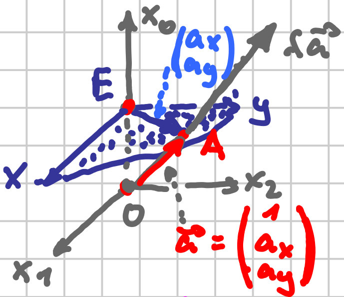

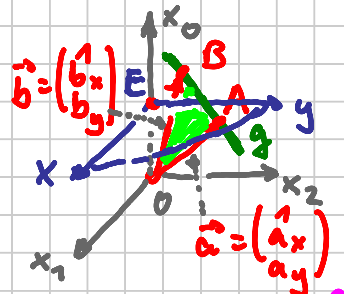

(vgl. Materialien zu Blatt 8!)

Aus Vorlesung: Man kann die projektiv abgeschlossene euklidische Ebene im proj. abgeschl. Raum $\mathbb{R}^3$ als Ebene $\varepsilon: x_0 = 1$ einbetten (betrachten). Jeder Strahl durch O schneidet ε in genau einem Punkt. Dabei ist ein eigentlicher Punkt A durch $\begin{pmatrix} 1 \\ a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ oder ein Vielfaches $\lambda \neq 0$ davon bestimmt. Durch

Nullvektor homogenisierender Faktor

$\begin{pmatrix} 0 \\ a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ erhält man den Fernpunkt in Richtung $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$.

$x_0 = 0$ ist somit die Gleichung der Ferngeraden.

T19 a) Die Verbindungsgerade g von $A(\vec{a})$ und $B(\vec{b})$ in ε ist der Schnitt der Ebene OAB mit ε! statt $P(\vec{p}), Q(\vec{q})$!

$\Rightarrow X(\vec{x}) \in g \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ bis auf Faktor $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Parametergleichung von g

$\Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = 0$ Gleichung von g

b) im $\mathbb{R}^3$! $\Leftrightarrow \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{=:\vec{u}}{}^T \vec{x} = 0$

$\Rightarrow \vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$ bis auf einen Faktor $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, denn es gilt:

$$[\rho \cdot (\vec{a} \times \vec{b})]^T \vec{x} = \underset{\neq 0}{\rho} \cdot [(\vec{a} \times \vec{b})^T \vec{x}] = 0 \Leftrightarrow (\vec{a} \times \vec{b})^T \vec{x} = 0$$

Beachte: Richtung von $\vec{u}$ unabhängig von Vielfachen $\neq 0$ von $\vec{a}$ oder $\vec{b}$!

$$\underset{\neq 0}{\lambda}\vec{a} \times \underset{\neq 0}{\mu}\vec{b} = \lambda \cdot \mu \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \underset{\neq 0}{\rho} \cdot \underset{\text{Richtung von } u}{(\vec{a} \times \vec{b})}$$

T20 gegeben: Hyperebene H^{n-1}: $\vec{u}^T\vec{x} = 0$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$ vgl. T19   Nullvektor

Punkt $Z(\vec{z}) \notin H^{n-1}$, d.h. $\vec{u}^T\vec{z} \neq 0$.

gesucht: Bildpunkt $Y(\vec{y})$ zu $X(\vec{x}) \in P^n \setminus \{Z\}$ bei Zentralprojektion aus Z auf H^{n-1}, d.h. der Schnittpunkt $Y(\vec{y}) = ZX \wedge H^{n-1}$.

Sei $X(\vec{x}) \in P^n \setminus \{Z\}$ ⇒ Parametergleichung der Geraden $g := ZX$: $\vec{y} = s\cdot\vec{x} + t\cdot\vec{z}$ ⇒ Schnittbedingung mit H^{n-1}

$$0 = \vec{u}^T\vec{y} = \vec{u}^T(s\cdot\vec{x} + t\cdot\vec{z}) = s\cdot\underbrace{\vec{u}^T\vec{x}} + t\cdot\underbrace{\vec{u}^T\vec{z}}$$

Wähle $(s,t) = (\vec{u}^T\vec{z}, -\vec{u}^T\vec{x})$ skalare Größen $\in \mathbb{R}$!

oder als Vielfaches $\neq 0$ davon

$$\Rightarrow \quad \vec{y} = (\vec{u}^T\vec{z})\cdot\vec{x} - (\vec{u}^T\vec{x})\cdot\vec{z} = (\vec{u}^T\cdot\vec{z})\vec{x} - \underline{\vec{z}\cdot(\vec{u}^T\cdot\vec{x})}$$

Alle Multiplikationen im 2. Summanden kann man als Matrizenmultiplikationen interpretieren, d.h. mit dem Assoziativgesetz gilt: $\vec{z}\cdot(\vec{u}^T\cdot\vec{x}) = (\vec{z}\cdot\vec{u}^T)\cdot\vec{x}$

(1,1)-Matrix

(n,1)-Matrix • (1,n)-Matrix • (n,1)-Matrix = (n,1)-Matrix

(n,n)-Matrix

Mit Einheitsmatrix E gilt: $\vec{x} = E\cdot\vec{x}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{y}}} = (\vec{u}^T\vec{z})\cdot E\cdot\vec{x} - (\vec{z}\cdot\vec{u}^T)\cdot\vec{x} = \underline{\underline{[(\vec{u}^T\vec{z})\cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T)]\vec{x}}}$$

Damit ist $\underline{A = (\vec{u}^T\vec{z})\cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T)}$

b) $A\vec{z} = [(\vec{u}^T\vec{z})\cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T)]\vec{z} = (\vec{u}^T\vec{z})\cdot\vec{z} - (\vec{z}\,\vec{u}^T)\cdot\vec{z} =$

$= (\vec{u}^T\vec{z})\cdot\vec{z} - \vec{z}(\vec{u}^T\vec{z}) = \underline{\underline{\vec{0}}}$ Matrizenprod. wie oben

Z hat kein Bild ?

c) $A\vec{x} = [(\vec{u}^T\vec{z})\cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T)]\,\vec{x} = (\vec{u}^T\vec{z})\cdot\vec{x} - (\vec{z}\,\vec{u}^T)\cdot\vec{x} =$

$$= (\vec{u}^T\vec{z})\cdot\vec{x} - \vec{z}\cdot(\underbrace{\vec{u}^T\vec{x}}_{\text{Für } X\in U^{n-1}:\ =0}) = (\underbrace{\vec{u}^T\vec{z}}_{\neq 0 \text{ da } Z \notin U^{n-1}})\cdot\vec{x}$$

Bild von $X \in U^{n-1}$ ist X, d.h. U^{n-1} ist Fixpunkthyperebene

T21. $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \quad (*)$

a) Übergang eukl. Koord. $\Rightarrow$ homogene Koord. $x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}$

$$\Leftrightarrow a_{11}\frac{x_1^2}{x_0^2} + 2a_{12}\frac{x_1}{x_0}\frac{x_2}{x_0} + a_{22}\frac{x_2^2}{x_0^2} + 2a_{01}\frac{x_1}{x_0} + 2a_{02}\frac{x_2}{x_0} + a_{00} = 0 \quad \Big|\cdot x_0^2$$

$$\Leftrightarrow a_{11}\underline{x_1^2} + 2a_{12}\underline{x_1x_2} + a_{22}\underline{x_2^2} + 2a_{01}\underline{x_0x_1} + 2a_{02}\underline{x_0x_2} + a_{00}\underline{x_0^2} = 0 \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

(Linearkomb. von Quadraten in x_0, x_1, x_2 !)

$$\Leftrightarrow (x_0, x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & 2a_{01} & 2a_{02} \\ 0 & a_{11} & 2a_{12} \\ 0 & 0 & a_{1} \end{pmatrix}}_{=\tilde{A}}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (***)$$

$= \tilde{A}$ ist <u>eine</u> mögliche Matrixdarstellung

Bilde $A := \frac{1}{2}(\tilde{A} + \tilde{A}^T) \Rightarrow A^T = \frac{1}{2}(\tilde{A}^T + \tilde{A}) = \frac{1}{2}(\tilde{A} + \tilde{A}^T) = A$

ist symmetrisch und es gilt:

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{x}^T(\tilde{A} + \tilde{A}^T)\vec{x} = \frac{1}{2}\Big[\vec{x}^T\tilde{A}\vec{x} + \underbrace{\vec{x}^T\tilde{A}^T\vec{x}}\Big] = \vec{x}^T\tilde{A}\vec{x} \overset{(***)}{=} 0$$

Für skal. Größen gilt: $\vec{x}^T\tilde{A}^T\vec{x} = (\vec{x}^T\tilde{A}^T\vec{x})^T = \vec{x}^T\tilde{A}\vec{x}$.

aus Matrizenrechnung: $(AB)^T = B^TA^T$

<u>alternativ</u>

$$(**) \Leftrightarrow a_{00}x_0^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{01}x_1x_0 + a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{02}x_2x_0 + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0, x_1, x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

symmetrisches A mit $A^T = A$ (eindeutig)

b) Gegeben: Kegelschnitt K: $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$, $A^T = A$, $\det A \neq 0$.

Punkt $P(\vec{p}) \in K \Leftrightarrow \vec{p}^T A \vec{p} = 0$ (*)

Gesucht: Gerade $g := PQ$ so, dass $\{P\} = PQ \cap K$ genau ein Schnittpunkt!

$P(\vec{p}) \neq Q(\vec{q})$

Parameterdarstellung von $g = PQ$: $\vec{x} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{q}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Schnittpunkte $\Leftrightarrow (\lambda \vec{p} + \mu \vec{q})^T A (\lambda \vec{p} + \mu \vec{q}) = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 \underbrace{\vec{p}^T A \vec{p}}_{=0 \text{ nach Voraus. } (*)} + 2\lambda\mu\, \vec{p}^T A \vec{q} + \mu^2 \underbrace{\vec{q}^T A \vec{q}}_{\neq 0, \text{ da sonst } Q \neq P \text{ zweiter Schnittpunkt mit } K} = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu \cdot (2\lambda\, \vec{p}^T A \vec{q} + \mu\, \vec{q}^T A \vec{q}) = 0$$

zwei Lösungen $\Leftrightarrow$
- $\mu = 0$ liefert den Punkt $P \in K$ als einen Schnittpunkt
- $\mu = -2\lambda \cdot \dfrac{\vec{p}^T A \vec{q}}{\vec{q}^T A \vec{q}}$ liefert für $\mu \neq 0$ einen weiteren Schnittpunkt

enthält für $\vec{q} = \vec{p}$ den 1. Fall ✓

$\Rightarrow PQ \cap K = \{P\} \Leftrightarrow \mu = 0 \Leftrightarrow \vec{p}^T A \vec{q} = 0$

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, da sonst $\vec{x} = \vec{0}$ ↯

$\Rightarrow$ Q liegt genau dann auf einer gesuchten Geraden durch P, wenn $\vec{p}^T A \vec{q} = 0$

$\Rightarrow$ Tgtengl.: $\underbrace{\vec{p}^T A}_{\vec{u}^T} \vec{x} = 0$ und Tgte in P an K eindeutig

$\Leftrightarrow \vec{u} = A\vec{p} \neq 0$ eindeutig bis auf Vielfaches $\neq 0$

da $\det A \neq 0 \Leftrightarrow (A\vec{p} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} = \vec{0})$

Anmerkung: In der euklidischen Ebene haben die Parallelen zur Achse einer Parabel oder die Parallelen zu den Asymptoten einer Hyperbel genau einen Schnittpunkt mit dem Kegelschnitt K, sind aber keine Tangenten! Projektiv gesehen haben diese Geraden den Fernpunkt $(0,0,1)$ der y-Achse bzw. die Fernpunkte der Asymptoten als zweite Schnittpunkte mit K.