WS 2010/11 Geometrie 1 LB Blatt 08 Hausaufgaben

Notiztitel 10.12.2010

H16 $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

Punkte $A(\vec{a}), C(\vec{c}), X(\vec{x})$ eigentlich; $B(\vec{b}), Z(\vec{z})$ Fernpunkte

a) $\varepsilon = ABC: \quad \vec{u}^T\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x}^T\vec{u} = 0$ mit $\vec{u} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{a}^T\vec{u} = 0 \\ B \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{b}^T\vec{u} = 0 \\ C \in \varepsilon \Leftrightarrow \vec{c}^T\vec{u} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&1\\1&0&2&1\end{pmatrix}\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

homogenisierender Faktor

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&1\\0&-2&2&0\end{pmatrix}\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&1\\0&0&6&2\end{pmatrix}\vec{u} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

b) $Z \notin \varepsilon \Leftrightarrow \vec{u}^T\vec{z} \neq 0 \Leftrightarrow (1\ 1\ 1\ -3)\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \underline{3 \neq 0}$ ✓

c) Nach T 20: $\vec{y} = M\vec{x}$ mit:

$$M = \underbrace{(\vec{u}^T z)}_{\text{aus b)}}\cdot E - (\vec{z}\,\vec{u}^T) = 3\cdot\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}(1\ 1\ 1\ -3)$$

$$= \begin{pmatrix}3&&&0\\&3&&\\&&3&\\0&&&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&-3\\2&2&2&-6\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}3&0&0&0\\-1&2&-1&3\\-2&-2&1&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}}$$

d) $$\vec{y} = \begin{pmatrix}3&0&0&0\\-1&2&-1&3\\-2&-2&1&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}3\\2\\4\\3\end{pmatrix}}$$

<u>Probe:</u> $$M\vec{a} = \begin{pmatrix}3&0&0&0\\-1&2&-1&3\\-2&-2&1&6\\0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\0\\3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$ Bild von A ist A!

homogenisierender Faktor

Z = Fernpunkt $\Rightarrow$ Zentralproj. ist Parallelproj. in Richtung $(0,1,2,0)^T$

H17 a) $h: xy = \frac{1}{2}$; $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ $\Rightarrow$ $h: \frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_0} = \frac{1}{2}$ $| 2x_0^2$

$\Rightarrow$ $h: x_0^2 - 2x_1x_2 = 0$ $\qquad \vec{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{= A \text{ mit } A^T = A.} \vec{x} = 0$

(Kegelschnittgleichung in $\mathbb{P}^2$)

b) Ferngerade $x_0 = 0 \cap h \Leftrightarrow -x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \wedge x_1 \neq 0 \\ \text{oder} \\ x_1 = 0 \wedge x_2 \neq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{h}_1 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{h}_2 = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_1(0,1,0) \\ H_2(0,0,1) \end{cases}$ $\quad (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$

bis auf $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dies sind die Fernpunkte der x- bzw y-Achse der eukl. Ebene

c) Nach T20 b) gilt im Fall $\det(A) = -1 \neq 0$ für die

Tgte $\underline{\underline{g_1}}$ in $H_1(\vec{h}_1)$: $\vec{h}_1^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

Tgte $\underline{\underline{g_2}}$ in $H_2(\vec{h}_2)$: $\vec{h}_2^T A \vec{x} = 0 \Leftrightarrow (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (0\ 0\ 1) \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x_1 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$

Übergang zu eukl. Koordinaten $x_1 = x \cdot x_0$, $x_2 = y \cdot x_0$ mit $x_0 = 1$ o.E.

liefert $g_1: y = 0$ (x-Achse) und $g_2: x = 0$ (y-Achse)

Bemerkung: Allgemein gilt: Die Asymptoten einer Hyperbel sind die Tangenten der Hyperbel in den Fernpunkten der Hyperbel.

Dieser Satz lässt sich unter Nutzung homogener Koordinaten ganz ohne Grenzbetrachtungen begründen, bei denen Koordinaten gegen ∞ gehen.

H18. $h: 4x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff \vec{x}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= A \text{ mit } A^T = A,\ \det A = -4 \neq 0} \vec{x} = 0$

$\vec{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Koord. einsetzen.

a) $P(\vec{p}) \in h \iff \vec{p}^T A \vec{p} = 0 \iff 4(\sqrt{3})^2 - (4)^2 + (2)^2 = 12 - 16 + 4 = 0$ ✓

Tgte t_p in $P(\vec{p})$: $\vec{p}^T A \vec{x} = (\sqrt{3}\ 4\ 2) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$= \underline{4\sqrt{3}x_0 - 4x_1 + 2x_2 = 0}$ oder Vielfaches davon

b) Tgten durch Q? gesucht $B(\vec{b}) \in h$ mit $Q(\vec{q}) \in t_B$

$\iff \underbrace{\vec{b}^T A \vec{b} = 0}_{1} \wedge \underbrace{\vec{b}^T A \vec{q} = 0}_{2}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{o}\}$

1 $\vec{b}^T A \vec{b} = 0 \iff 4b_0^2 - b_1^2 + b_2^2 = 0$

2 $\vec{b}^T A \vec{q} = 0 \iff 4b_0 \cdot 1 - b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 6 = 0$

2 $\Rightarrow$ 2' $b_1 = 2b_0 + 3b_2$ in 1 eingesetzt liefert

$\Rightarrow 4b_0^2 - (4b_0^2 + 12b_0b_2 + 9b_2^2) + b_2^2 = 0$

$\iff 12b_0b_2 + 8b_2^2 = 0 \iff b_2(3b_0 + 2b_2) = 0$

$\iff \begin{cases} b_2 = 0 \ \wedge\ b_1 = 2b_0 \Rightarrow \vec{b}_1 = b_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ b_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \text{oder} \quad \text{wegen 2'} \quad b_0 \text{ homogenisierender Faktor} \\ b_2 = -\frac{3}{2}b_0 \ \wedge\ b_1 = -\frac{5}{2}b_0 \Rightarrow \vec{b}_2 = \frac{b_0}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},\ b_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$

Tgte t_{B_1} in $B_1(\vec{b}_1)$: $\vec{b}_1^T A \vec{x} = (1\ 2\ 0) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{x_0 - 2x_1 = 0}$

Tgte t_{B_2} in $B_2(\vec{b}_2)$: $\vec{b}_2^T A \vec{x} = (2\ -5\ -3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{8x_0 + 5x_1 - 3x_2 = 0}$

<u>Anmerkung:</u> Die Gleichung 2 $\vec{q}^T A \vec{x} = 0$ stellt stets eine Gerade dar, welche die gesuchten Berührpunkte B_1, B_2 enthält. Man bezeichnet diese Gerade als Polare zu Q bzgl. des Kegelschnitts $h: \vec{x}^T A \vec{x} = 0$.

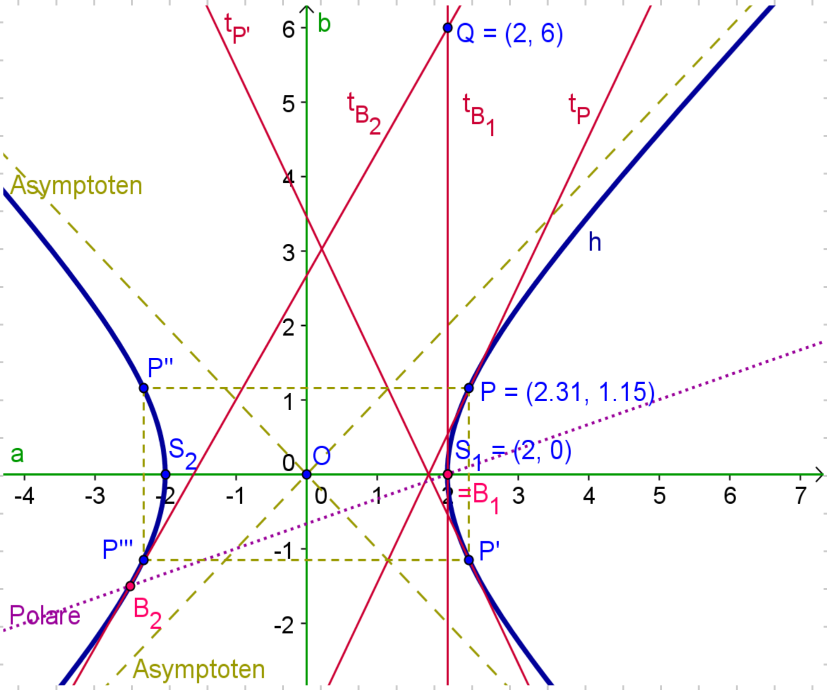
Übergang zu euklidischen Koordinaten: $x_1 = x \cdot x_0$, $x_2 = y \cdot x_0$

o.E.

mit $x_0 = 1$ bzw. wähle homogenisierenden Faktor so, dass die 0.-te homogene Koordinate $= 1$ ist. D.h. Euklidische Sicht:

h: $x^2 - y^2 = 4$; $P = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $Q = (2,6)$; $B_1 = (2,0)$, $B_2 = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$t_P: 2x - y = 2\sqrt{3}$; $t_{B_1}: x = 2$; $t_{B_2}: 5x - 3y = -8$



Asymptoten

$y = \pm x$. *)

Symmetrie

$S_1 = (2,0) \in h$ Sbw

Kegelschnitt

h durch 5 Pkte:

P, P', P'', P''', S_1

*) Die Hyperbel ist punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt O. Damit erhält man ihre Asymptoten auch als Tgten aus O an die Hyperbel. D.h. deren Berührpunkte H_1, H_2 auf der Polaren zu $(1,0,0)$: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_0 = 0$, d.h. auf der Ferngerade

$\Leftrightarrow -x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2 \Leftrightarrow H_1(0,1,1) \wedge H_2(0,1,-1)$

$\Rightarrow OH_{1/2}: x_2 = \pm x_1 \underset{\uparrow}{\Rightarrow} y = \pm x$.

Übergang zur euklidischen Ebene