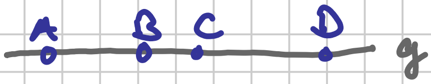
WS 2010/11 Geometrie 1 LB Übungen Blatt 07

Notiztitel 07.12.2010

<u>Aus Vorlesung:</u> DV zu 4 verschiedenen Punkten $A, B, C, D \in g$ Gerade



$$DV(A,B,C,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \varepsilon \; ; \; \varepsilon = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow AB \text{ trennt } CD \begin{Bmatrix} \text{nicht} \\ - \end{Bmatrix}$$

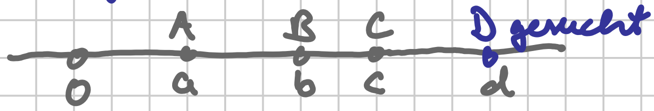
$$D \to \text{Fernpunkt} \Rightarrow DV \to TV(A,B,C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

T17. Gegeben drei verschiedene Punkte $A, B, C \in$ Gerade g und das $DV(A,B,C,D) = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Zu zeigen: $\exists_1$ Punkt $D \in g$ mit $DV(A,B,C,D) = \lambda$

in dieser Reihenfolge, vgl H14

1) Seien zunächst A, B, C eigentliche Punkte, o.E. auf einem Zahlenstrahl,



Dann sind den Punkten Zahlen $\in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zugeordnet und durch $\overrightarrow{BC} = c - b$ gerichtete Abstände: $\overrightarrow{BC} \begin{cases} > 0, & B \text{ links von } C \\ < 0, & B \text{ rechts von } C \end{cases}$

$$\Rightarrow DV(A,B,C,D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \quad \begin{cases} > 0 & \text{im Fall } AB \text{ trennt } CD \text{ nicht} \\ < 0 & \text{im Fall } AB \text{ trennt } CD \end{cases}$$

Fall 1: $\lambda = \infty \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow d - a = 0 \Rightarrow D = A$ <u>eindeutig</u>

Fall 2: $\lambda \overset{!}{=} DV(A,B,C,D) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} \in \mathbb{R}$ nach d auflösen

$$\Leftrightarrow (d-a)\lambda = \frac{c-a}{c-b} \cdot (d-b) \Leftrightarrow d\left(\lambda - \frac{c-a}{c-b}\right) = a \cdot \lambda - \frac{c-a}{c-b} \cdot b$$

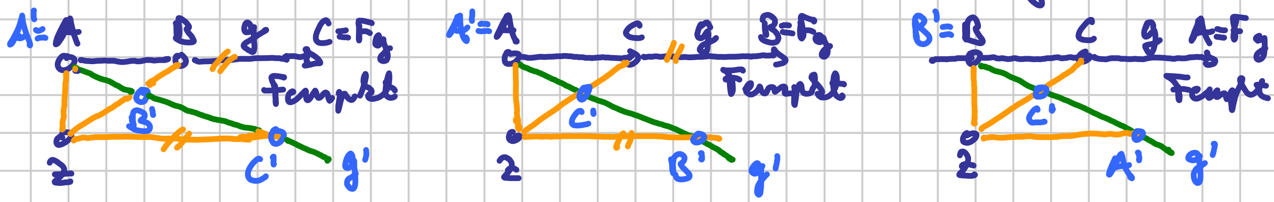
<u>Fall 2.1.</u> $\lambda \neq \frac{c-a}{c-b} \Rightarrow d = \frac{a\lambda \cdot (c-b) - (c-a)b}{\lambda(c-b) - c + a} \Rightarrow D$ <u>eindeutig</u>

<u>Fall 2.2:</u> $\lambda = \frac{c-a}{c-b}$ $[TV(A,B,C)] \Rightarrow$

$$d \cdot 0 = a \cdot \frac{c-a}{c-b} - \frac{c-a}{c-b} b = (a-b) \cdot \frac{c-a}{c-b} \neq 0 \Rightarrow d = \infty$$

$\Rightarrow D = F_g$ (Fernpkt von g) <u>eindeutig</u>.

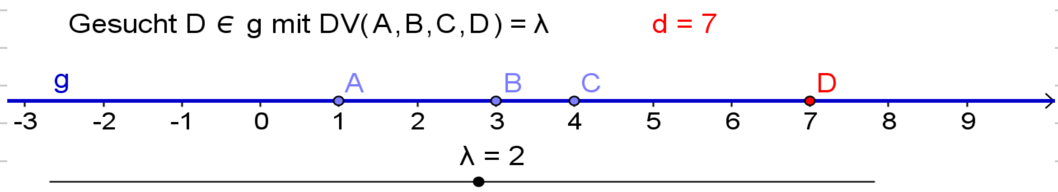
2) Falls einer der drei Punkte A, B, C der Fernpunkt F_g ist, wählen wir eine Zentralprojektion $\kappa_Z: g \to g' = \kappa(g)$ so, dass die Bilder $A' = \kappa(A)$, $B' = \kappa(B)$, $C' = \kappa(C)$ eigentlich sind



Da das DV dabei (nach Vorlesung) invariant ist, gilt mit 1)

$\exists_1\ D' \in g'$ mit $DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D) = \lambda$

$\Rightarrow \exists_1\ D = \kappa_Z^{-1}(D') \in g$ mit $DV(A, B, C, D) = \lambda \Rightarrow D$ eindeutig



Für $\lambda = 3$ ist $D = F_g$, für $\lambda = 1$ ist $D = C$,

Für $\lambda = 0$ ist $D = B$, für $\lambda = \infty$ ist $D = A$

genau für $\lambda < 0$ liegt D zwischen A und B !

T18 Konstruktive DV-Übertragung.

Gegeben: 4 verschiedene Punkte $A, B, C, D \in g$ Gerade und 3 verschiedene Punkte $A', B', C' \in g'$ Gerade

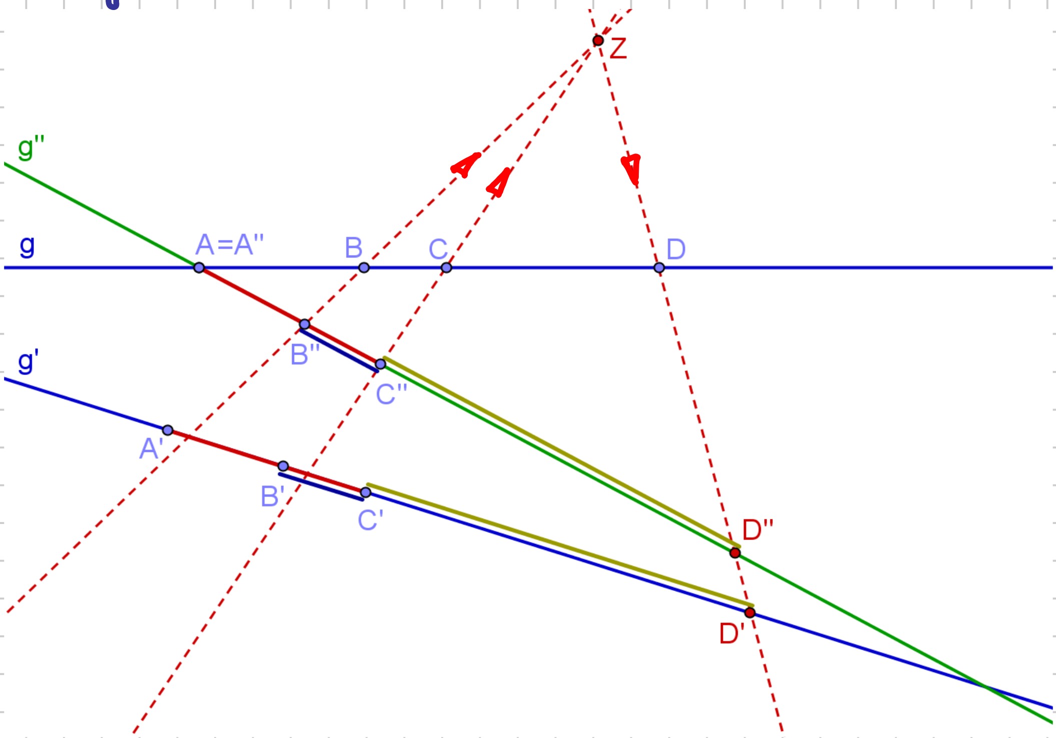
Gesucht: $D' \in g'$ so, dass $DV(A', B', C', D') = DV(A, B, C, D)$

Konstruktionsbeschreibung

1) Wähle $g'' \neq g$ durch A und übertrage die (gerichteten) Strecken $\overrightarrow{A'C'}$ und $\overrightarrow{B'C'}$ von $A'' = A$ aus auf g''.

2) Ermittele $Z = B''B \cap C''C$ und $D'' = ZD \cap g''$, dann gilt: $DV(A'', B'', C'', D'') = DV(A, B, C, D)$, da A'', B'', C'', D'' nach Konstruktion Bilder von A, B, C, D unter der Zentralprojektion $\kappa_Z: g \to g'' = \kappa_Z(g)$ $Z \notin g, g''$ sind.

3) Übertrage die (gerichtete) Strecke $\overrightarrow{C''D''}$ von C' aus auf g' $\Rightarrow$ D' mit $DV(A',B',C',D') = DV(A,B,C,D)$.



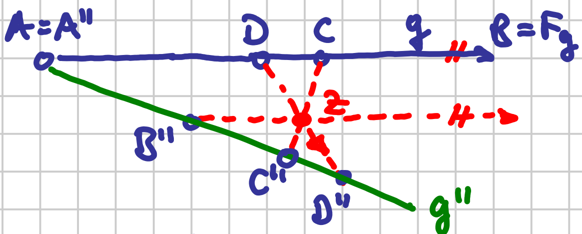
Diese Konstruktion ist in der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene allgemeingültig.

Wir betrachten einige Sonderfälle:

1) $A \neq F_g$ (Fernpunkt von g)

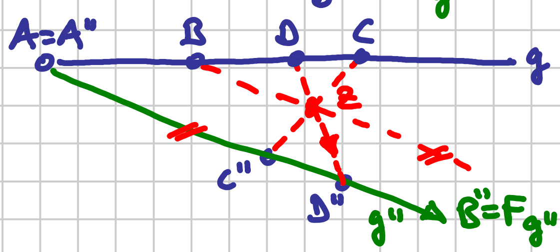
1.1) $B = F_g$ (oder $C = F_g$)

$\Rightarrow CC'' \parallel g \Rightarrow Z = B''B \cap C''C$ ... kein Fernpkt

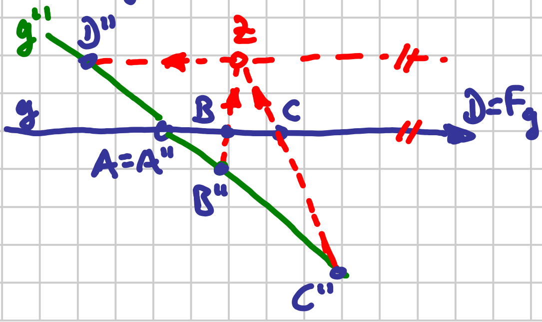


1.2) $B'' = F_{g''}$ (oder $C'' = F_{g''}$)

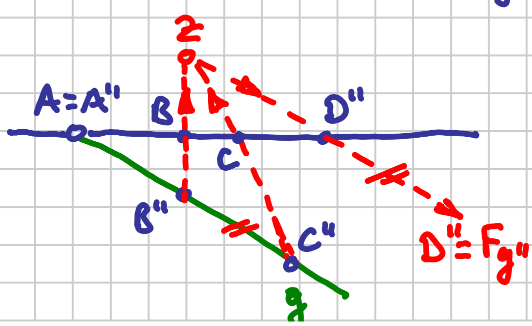
$\Rightarrow CC'' \parallel g'' \Rightarrow Z = B''B \cap C''C$ ... kein Fernpkt



1.3) $D = F_g$, Z kein Fernpkt

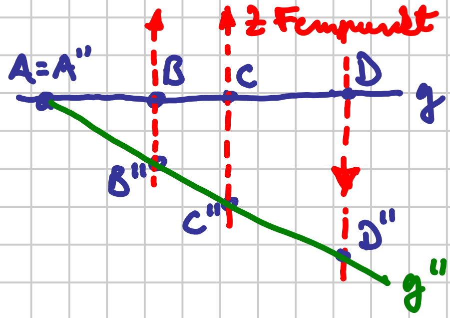


1.4) Z kein Fernpkt, $D'' = F_{g''}$



1.5) Ist Z ein Fernpunkt, dann ist κ_Z eine Parallelprojektion (DV-Übertrag $\hat{=}$ zentr. Streck. aus A)

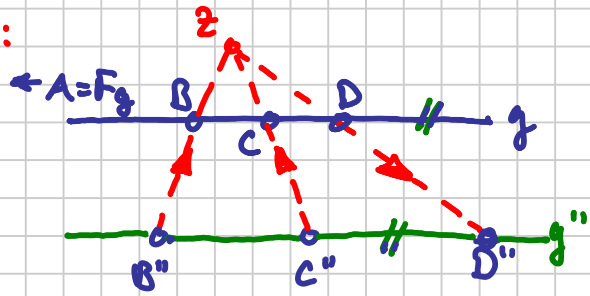
Ist $D = F_g \Rightarrow D'' = F_{g''} \Rightarrow D' = F_{g'}$



2) Ist $A = F_g$, so übertrage $DV(B,A,D,C) = DV(A,B,C,D)$ mit g'' durch $B = B''$ .... oder:

wenn auch $A' = F_{g'}$

wähle B'' beliebig auf $g'' \parallel g$



2.1) Z eigentlich $\Rightarrow \kappa_Z$ ist eine zentrische Streckung aus Z

2.2) Z ist Fernpunkt $\neq F_g \Rightarrow \kappa_Z$ ist Parallelprojektion (DV-Übertrag durch Parallelogramme)