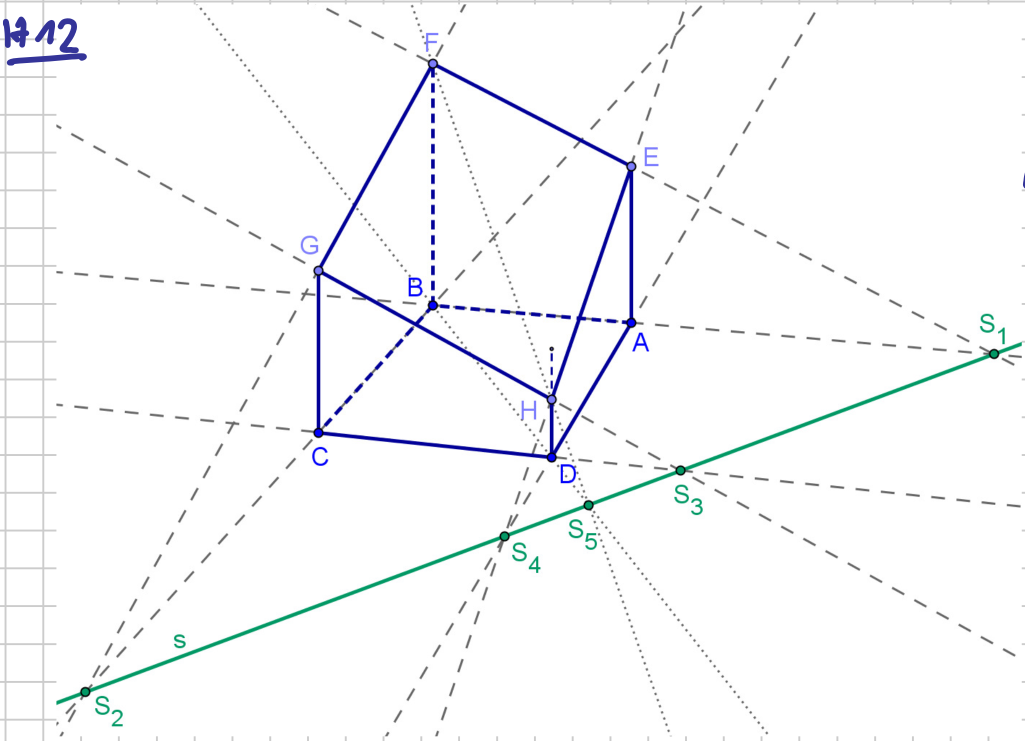
WS 2010/11 Geometrie 12B Blatt 06 Hausaufgaben

Notiztitel 28.11.2010

H12



$D \in \varepsilon_1 := ABC$

$H \in \varepsilon_2 := EFG$

$E \in \delta_1 := ABF$

$G \in \delta_2 := CBF$

$H \in \delta_3 := CDG$

$H \in \delta_4 := ADE$

In Ebene δ_1 gilt: $\boxed{S_1 = AB \cap EF} \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, da $S \in AB \subset \varepsilon_1$, $S \in EF \subset \varepsilon_2$

In Ebene δ_2 gilt: $\boxed{S_2 = BC \cap FG} \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, da $S \in BC \subset \varepsilon_1$, $S \in FG \subset \varepsilon_2$

$\Rightarrow \boxed{S_1 S_2 = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 =: s}$

Annahme H ist bekannt, dann gilt analog

in Ebene δ_3 gilt: $S_3 = CD \cap GH \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = s$

(in Ebene δ_4 gilt: $S_4 = AD \cap EH \in \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = s$)

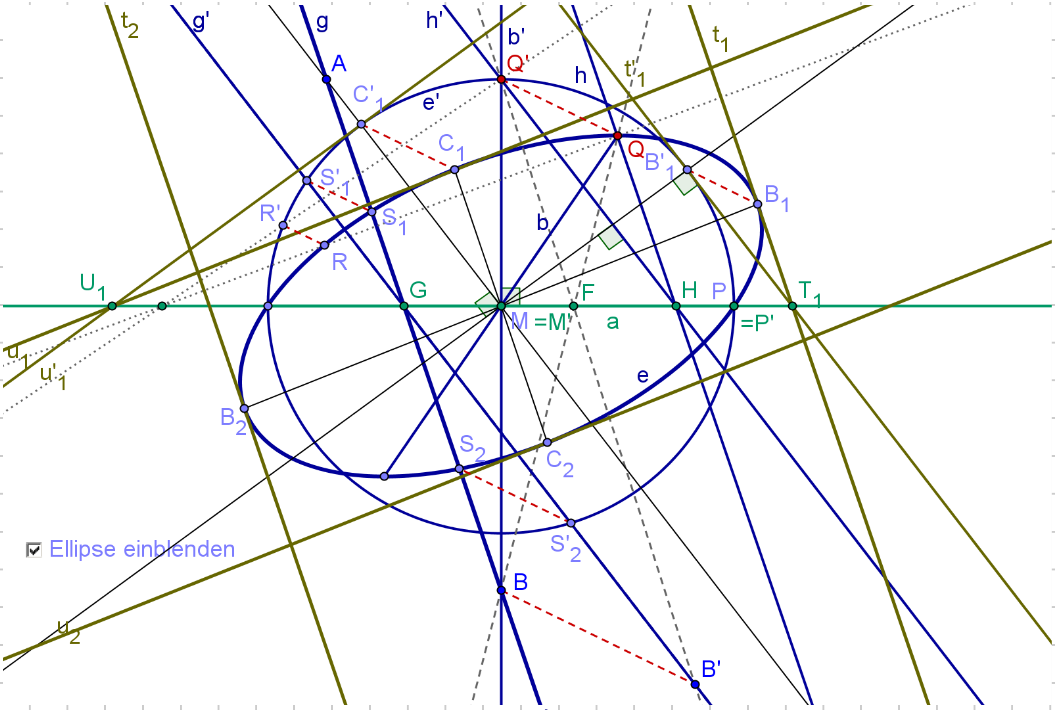
Umgekehrt erhält man mit Parallelen ℓ zu AE durch D

$\boxed{S_3 = CD \cap s} \Rightarrow \boxed{H = \ell \cap GS_3}$

oder $\boxed{S_4 = AD \cap s} \Rightarrow \boxed{H = \ell \cap ES_4}$ für Zeichenkontrolle

Man kann obige Konstruktion als perspektive Affinität deuten mit Affinitätsachse a und Punkt-Bildpunktpaar (A;E). (Parallelriss der Parallelproj. von ε_1 auf ε_2.)

H13



1) Wähle $P'=P$, $M'=M$, $e'=k(M';P')$, b' mit $M'\in b'\perp a$ und $Q'\in b'\cap e'$.

Unter der Affinität φ mit Affinitätsachse $a=MP=M'P'$ und Punkt-Bildpunktpaar (Q,Q') ist e dann affines Kreisbild von $e'=\varphi(e)$, d.h. $e=\varphi^{-1}(e')$.

a) • Bestimme Gerade $g'=\varphi(g)$ durch $G'=G=g\cap a$

z.B. mit B' ($F=BQ\cap a \Rightarrow B'Q'=Q'F$ und $BB'\parallel QQ'$ durch B)

oder mit Hilfe der Parallelen h zu g durch Q

$\Rightarrow$ $h'=\varphi(h)=Q'H'$ mit $H'=H=h\cap a$

$\Rightarrow$ g' = Parallele zu h' durch G'

↑

Bilder paralleler Geraden sind parallele Geraden!

• Konstruiere $\{S_1', S_2'\}=g'\cap e'$

• Bestimme Urbilder $\{S_1, S_2\}\in g$ mit Hilfe der Affinitätsstrahlen $\parallel QQ'$ durch S_1' bzw S_2'.

b) • t_1, t_2 sind Urbilder der Kreistangenten $t_1', t_2' \parallel g' \parallel h'$

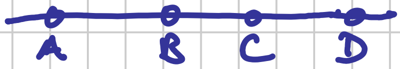
$\Rightarrow$ $B_{1/2}'$ auf Lot zu h' bzw. g'.

Urbild t_1 von t_1' mit Hilfe Fixpunkt $T_1=T_1'=t_1'\cap a$

Urbild B_1 von B_1' auf t_1 mit Hilfe des Affinitätsstrahls durch B_1'. t_2 und B_2 über Punktspiegelung an M!

c) $M'C_1' \perp M'B_1'$ mit $C_1' \in e' \Rightarrow C_1$ z.B. mit Hilfe der Tangente u_1' in C_1' an e' und deren Urbild u_1 vgl. Konstr. von t_1.

H14



$$DV(A,B,C,D) := \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \cdot \varepsilon$$

mit $\varepsilon = \left\{ \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} \right\}$, wenn das Paar (A,B) das Paar (C,D) $\left\{ \begin{matrix} \text{nicht} \\ - \end{matrix} \right\}$ trennt.

nach Vorlesung bzw. Angabe

Sei $\delta := DV(A,B,C,D) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1)\ DV(A,B,D,C) = \frac{1}{\delta} \\ (2)\ DV(A,C,B,D) = 1-\delta \\ (3)\ DV(B,A,C,D) = \frac{1}{\delta} \\ (4)\ DV(B,A,D,C) = \delta \end{array} \right\} \Rightarrow$

lexikographisch

(1) $DV(B,A,D,C) \overset{(4)}{=} DV(A,B,C,D) = \underline{\delta}$

(2) $DV(B,A,C,D) \overset{(4)}{=} DV(A,B,D,C) \overset{(1)}{=} \underline{\frac{1}{\delta}}$

(3) $DV(C,A,D,B) \overset{(4)}{=} DV(A,C,B,D) \overset{(2)}{=} \underline{1-\delta}$

(4) $DV(C,A,B,D) \overset{(4)}{=} DV(A,C,D,B) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(A,C,B,D)} \overset{(3)}{=} \underline{\frac{1}{1-\delta}}$

(5) $DV(D,A,B,C) \overset{(4)}{=} DV(A,D,C,B) \overset{(2)}{=} 1 - DV(A,C,D,B) \overset{(4)}{=} 1 - \frac{1}{1-\delta} = \underline{\frac{\delta}{\delta-1}}$

(6) $DV(D,A,C,B) \overset{(4)}{=} DV(A,D,B,C) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(A,D,C,B)} \overset{(5)}{=} \frac{\delta-1}{\delta} = \underline{1-\frac{1}{\delta}}$

Es fehlen noch

(7) $DV(C,B,D,A) \overset{(4)}{=} DV(B,C,A,D) \overset{(2)}{=} 1 - DV(B,A,C,D) \overset{(2)}{=} \underline{1-\frac{1}{\delta}}$ vgl. (6)

(8) $DV(C,B,A,D) \overset{(4)}{=} DV(B,C,D,A) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(B,C,A,D)} \overset{(7)}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{\delta}} = \underline{\frac{\delta}{\delta-1}}$ vgl. (5)

(9) $DV(D,B,C,A) \overset{(4)}{=} DV(B,D,A,C) \overset{(2)}{=} 1 - DV(B,A,D,C) \overset{(1)}{=} \underline{1-\delta}$ vgl. (3)

(10) $DV(D,B,A,C) \overset{(4)}{=} DV(B,D,C,A) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(B,D,A,C)} \overset{(9)}{=} \underline{\frac{1}{1-\delta}}$ vgl. (4)

(11) $DV(D,C,B,A) \overset{(4)}{=} DV(C,D,A,B) \overset{(2)}{=} 1 - DV(C,A,D,B) \overset{(3)}{=} 1-(1-\delta) = \underline{\delta}$ vgl. (1)

(12) $DV(D,C,A,B) \overset{(4)}{=} DV(C,D,B,A) \overset{(1)}{=} \frac{1}{DV(C,D,A,B)} \overset{(11)}{=} \underline{\frac{1}{\delta}}$ vgl. (2)

Anmerkung: Je 4 DV der 24 sind gleich $\delta, \frac{1}{\delta}, 1-\delta, \frac{1}{1-\delta}, 1-\frac{1}{\delta}, \frac{\delta}{1-\delta}$