WS 2010/11 Geometrie 1 LB Übungen Blatt 05

Notiztitel 24.11.2010

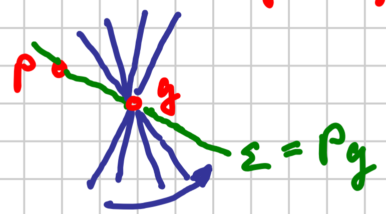
T18. Zeigen Sie: Zu P, g mit $P \notin g$ gibt es ein ε mit $P \in \varepsilon$, $g \subset \varepsilon$.

Wir haben hier eine Fallunterscheidung durchzuführen.

Punkt P ist $\begin{cases} \text{eigentlich} \\ \text{Fernpunkt} \end{cases}$ Gerade g ist $\begin{cases} \text{eigentlich} \\ \text{Ferngerade} \end{cases}$ (4 Fälle)

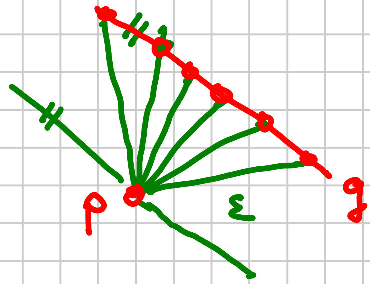
1. Fall P und g eigentlich.

Blick in Richtung von g



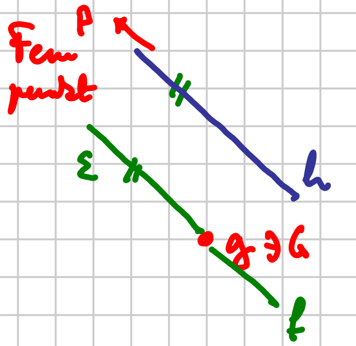
Betrachte Ebenenschar durch g.
In dieser gibt es genau eine, die neben g auch P enthält.

Die Verbindungsebene $\varepsilon = Pg$ wird erzeugt durch alle Verbindungsgeraden von P zu allen Punkten von g und die Parallele zu g durch P. (Verbindungsgerade von P mit Fernpunkt von g)



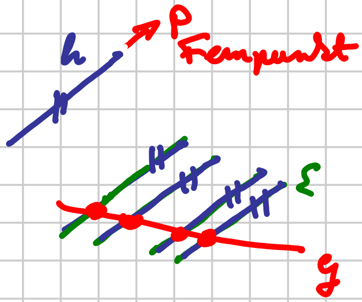
2. Fall P Fernpunkt und g eigentlich

Blick in Richtung von g



P ist Fernpunkt aller parallelen Geraden zu einer Geraden h. Wähle durch einen Punkt $G \in g$ die Parallele f zu h. Dann spannen g und f eine Ebene auf, die g und P enthält.

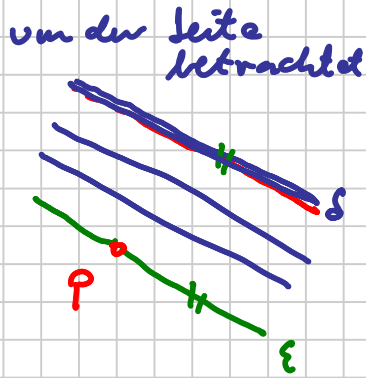
Die Verbindungsebene $\varepsilon = Pg$ wird erzeugt durch die Parallelen zu h durch alle Punkte von g.

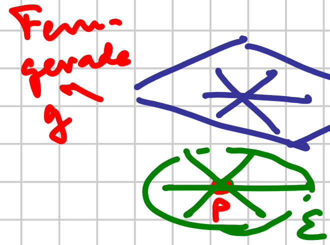


3. Fall P eigentlich und g Ferngerade

g ist Ferngerade aller parallelen Ebenen zu einer Ebene δ. In dieser Parallelebenenschar gibt es genau eine, die P und die Ferngerade g enthält.

Die Verbindungsebene $\varepsilon = Pg$ wird erzeugt durch die Parallelen zu allen Geraden von δ.





4. Fall: P ist Fernpunkt und g Ferngerade $\Rightarrow \varepsilon =$ Fernebene

T13. Zu zeigen: $g \cap \varepsilon \neq \emptyset$

Fall 1: $g \subset \varepsilon \Rightarrow g \cap \varepsilon = g \neq \emptyset$ klar

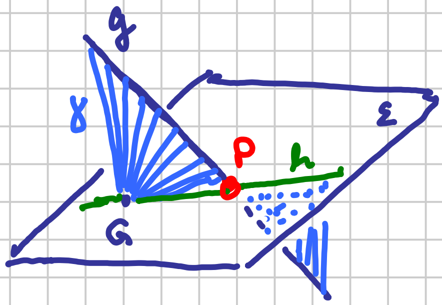
Fall 2: $g \not\subset \varepsilon \Rightarrow$ Es gibt $G \in \varepsilon$ mit $G \notin g \overset{T12}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ Es gibt Ebene $\gamma = Gg \Rightarrow \gamma \cap \varepsilon = h$ (Schnittgerade h)

$\Rightarrow \underset{\neq g}{h}$ schneidet g in der Ebene γ immer in einem Punkt

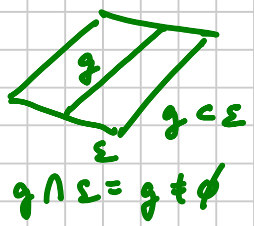
$P = h \cap g$ und es gilt $P \in h \subset \varepsilon$ d.h. $P \in \varepsilon$ und $P \in g$

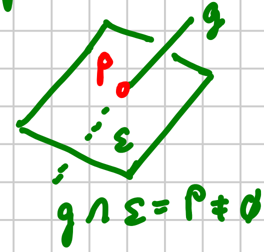
$\Rightarrow P = g \cap \varepsilon$

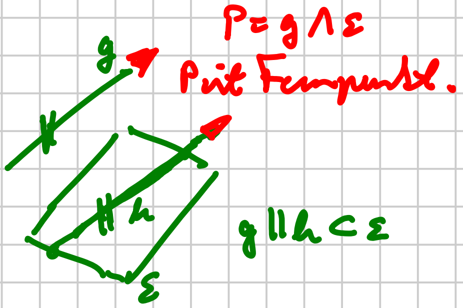


Satz gilt für alle folgenden Fälle

- g eigentlich, ε eigentlich

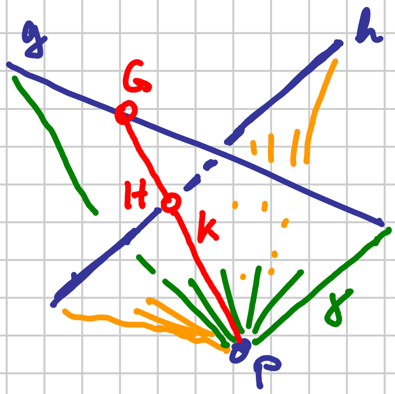






- g uneigentlich, ε eigentlich mit Ferngerade e
  $\Rightarrow P = e \cap g = \varepsilon \cap g$ ist Fernpunkt.
- g eigentlich mit Fernpunkt G, ε uneigentlich = Fernebene
  $\Rightarrow P = G = g \cap \varepsilon$ ist Fernpunkt
- g uneigentlich = Ferngerade, ε uneigentlich = Fernebene $\Rightarrow g \cap \varepsilon = g$

<u>T13</u>



Betrachte $\boxed{\gamma = Pg}$ (vgl. T12)

$\overset{T13}{\Rightarrow}$ $h \cap \gamma = \underline{H}$ (eindeutig)

(Beachte: Für $h \subset \gamma$ gäbe es in γ einen Schnitt $h \cap g$ ↯.)

$\Rightarrow$ <u>in γ</u>: $PH \cap g = \underline{G}$ (eindeutig.)

(Ann. $g = PH \Rightarrow P \in g$ ↯)

$\Rightarrow K = GH \ni P$ und k trifft g und h in einem Punkt.

Oder: Betrachte $\boxed{\eta = Ph}$ (vgl. T12) $\overset{T13}{\Rightarrow}$ $g \cap \eta = \underline{G}$ (eindeutig)

(Beachte: Für $g \subset \eta$ gäbe es in η einen Schnitt $h \cap g$ ↯)

$\Rightarrow$ <u>in η</u>: $PG \cap h = H$ (eindeutig)

(Ann. $h = PG \Rightarrow P \in h$ ↯)

Es gilt: $K = PH = PG = GH = \underline{\underline{Ph \cap Pg}}$