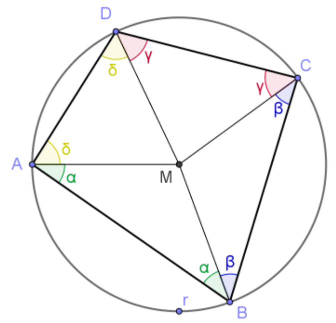
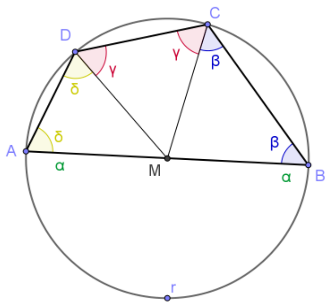
WS 2010/11 Geometrie 1 LB Hausaufgaben Blatt 04

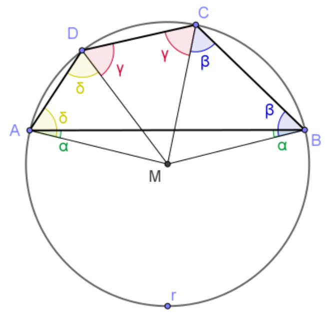
Notiztitel 15.11.2010

H7 1. Weg Zerlege das Viereck mittels M in Dreiecke

Vollständige Fallunterscheidung:







($\alpha = 0$)

Fall 1: M im Viereck

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA =$

$= \alpha + \beta + \gamma + \delta$

$= \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$

Fall 2: M auf Rand

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA =$

$= \beta + \gamma + \delta =$

$= \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$

Fall 3: M außerhalb.

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA =$

$= \beta - \alpha + \gamma + \delta =$

$= \sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB$

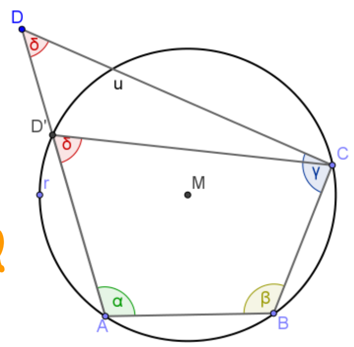
Mit Winkelsumme im Viereck $= 360°$ folgt Behauptung Teil 1:

ABCD Sehnenviereck $\Rightarrow$ gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu $180°$.

Umkehrung mittels Widerspruchbeweis:

Annahme: Gegenüberliegende Winkel ergänzen sich zu $180°$, o.E. $\delta \leq 90°$, aber D liegt nicht auf dem Umkreis von ABC.

Dann schneidet AD (bzw. CD) u in einem Punkt D' mit $\beta + \sphericalangle CD'A = 180°$



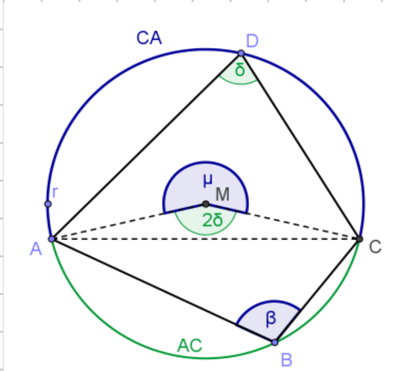
$\Rightarrow \sphericalangle CDA = \sphericalangle CD'A = \delta \Rightarrow \sphericalangle DCD' = 0°$

Außenwinkel = Summe nicht anl. Innenwinkel

$\Rightarrow$ ↯

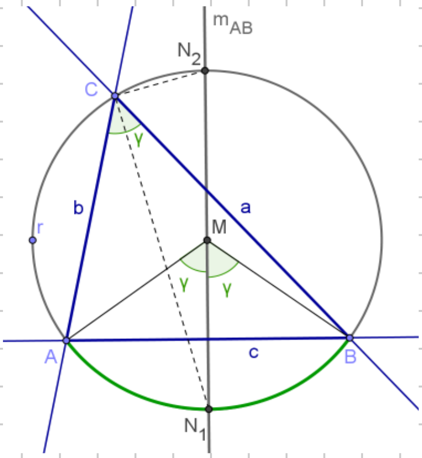
Bemerkung: Aus diesem Satz folgt T10 b) und c), da bei festem A, B, C für alle D auf dem Bogen CA gilt: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 180° \Leftrightarrow \sphericalangle CDA = \underbrace{180° - \sphericalangle ABC}_{= \text{const.}!}$
T10 a) muss dann noch gezeigt werden.

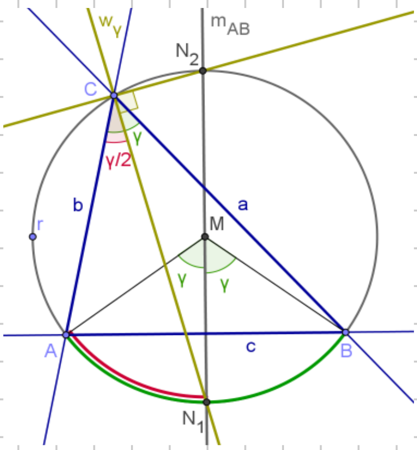
2. Weg: mit Peripheriewinkelsatz:
Die Mittelpunktswinkel über den Bögen AC und CA ergänzen sich zu 360° und sind jeweils doppelt so groß wie die Peripheriewinkel β und δ $\Rightarrow \beta + \delta = 180°$



Analog ergibt sich $\alpha + \gamma = 180°$ bzw. $\alpha + \gamma = 360° - (\beta + \delta) = 180°$

H8

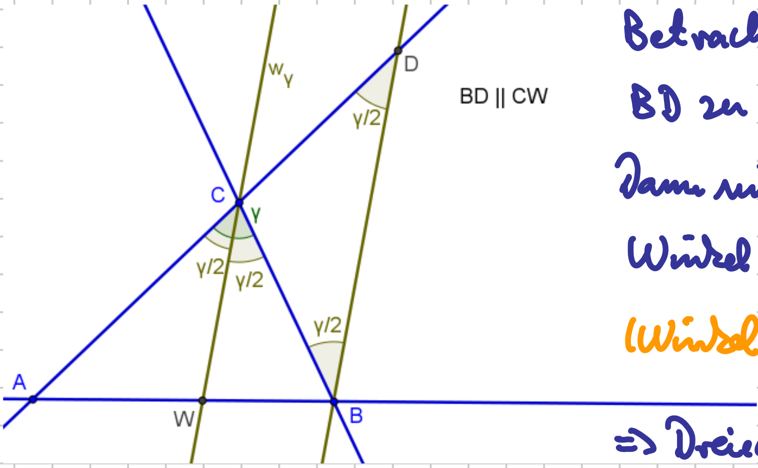




Gegeben Umkreis k des Dreiecks ABC, sowie $\{N_1, N_2\} = m_{AB} \cap k$.
$C \in \{N_1, N_2\} \Rightarrow$ ABC ist gleichschenklig und $w_\gamma = m_{AB} = N_1N_2$. (klar)
Sei also $C \notin \{N_1, N_2\}$
Dann gilt nach dem Peripheriewinkelsatz über dem Bogen AB
$\sphericalangle AMB = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot \gamma$
$\Rightarrow \sphericalangle AMN_1 = \sphericalangle N_1MB = \gamma$
Symmetrie.
Über dem Bogen $\overline{AN_1}$ gilt:
$\sphericalangle AMN_1 = 2 \cdot \sphericalangle ACN_1 = \gamma \Rightarrow \sphericalangle ACN_1 = \frac{\gamma}{2}$
$\Rightarrow CN_1$ ist Innenwinkelhalbierende

C liegt auf dem Thaleskreis über $N_1N_2 \Rightarrow \sphericalangle N_1CN_2 = 90°$
$\Rightarrow CN_2$ ist Außenwinkelhalbierende

129



Betrachte die Parallele BD zu $w_\gamma = CW$ durch B.

Dann sind die eingetragenen Winkel alle gleich $\gamma/2$

(Winkel an Parallelen Geraden)

$\Rightarrow$ Dreieck BCD ist gleichschenklig

$\Rightarrow \overline{BC} = \overline{CD} = a$

Strahlensatz mit Zentrum A

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$