WS 2010/11 Geometrie 1 LB Übungen Blatt 03

Notiztitel 10.11.2010

T7 Inzidenzraum / Affine Ebene

Es seien P eine Menge, deren Elemente wir Punkte, und $\mathcal{G}$ eine Teilmenge der Potenzmenge von P, deren Elemente wir Geraden nennen. Das Paar $(P, \mathcal{G})$ heißt Inzidenzraum, wenn folgende Axiome gelten:

I1 Zu $x, y \in P$ mit $x \neq y$ gibt es genau ein $G \in \mathcal{G}$ mit $x, y \in G$

I2 Für alle $G \in \mathcal{G}$ gilt $|G| \geq 2$ (i.W. G enthält mind. 2 Pkte)

Ein Inzidenzraum $(E, \mathcal{G})$ heißt affine Ebene, wenn gilt:

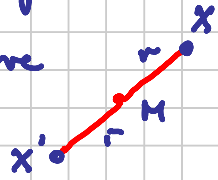
E1 Es gibt drei nicht-kollineare Punkte

E2 (Parallelenaxiom) Zu jedem Paar $(x, G) \in E \times \mathcal{G}$ mit $x \notin G$ gibt es genau ein $H \in \mathcal{G}$ mit $x \in H$ und $G \cap H = \emptyset$

Bemerkung: Hier werden Punkte mit kleinen und Geraden mit großen Buchstaben bezeichnet. Oft bezeichnen wir aber Punkte mit großen und Geraden mit kleinen Buchstaben.

T7 Nur Ebenen, die den Kugelmittelpunkt enthalten, schneiden die Kugel in einem Kreis vom Kugelradius r, vgl. Äquatorkreis und Längenkreise bzw Breitenkreise eines Globus.

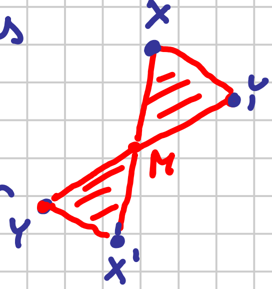
a) Sei nun E die Menge aller (ungeordneten) Paare (x, x') diametral gegenüberliegender Punkte



und $\mathcal{G}$ die Menge aller Großkreise $\subset$ Potenzmenge von E.

Bemerkung: Wir müssen hier Punkte, Geraden, Ebenen des Raumes unterscheiden von Punkten (Paaren) und Geraden (Großkreise) von $(E, \mathcal{G})$. Dann gilt:

I1. Zu zwei Paaren $(X,X'),(Y,Y') \in E$ mit $(X,X') \neq (Y,Y')$ gibt es genau eine Ebene (aufgespannt von den Punkten X, Y, M), die die Kugel in einem Großkreis schneidet, d.h.



Es gibt genau ein $g \in \mathcal{G}$ mit $(X,X'),(Y,Y') \in g$

I2. Für alle $g \in \mathcal{G}$ gilt $|g| \geq 2$ ist hier sicher erfüllt, da jeder Großkreis unendlich viele Punkte und damit unendlich viele Paare diametral gegenüberliegender Punkte enthält.

b) E1. Es gibt drei nicht kollineare Punkte ist sicher erfüllt.

E2. ist aber <u>nicht</u> erfüllt, da sich im Raum je zwei Großkreisebenen stets in einer Geraden durch M und damit zwei Geraden $\in \mathcal{G}$ (Großkreise) stets in einem Punkt $\in E$ (Punktepaar (P,P')) schneiden.

Anmerkung: Die Großkreise bilden die Kurven kürzesten Abstandes zwischen zwei Punkten auf einer Sphäre!

<u>I8</u>. $P = \{x\}$ und $\mathcal{G} = \emptyset \subset$ Potenzmenge von $P = \{\emptyset, \{x\}\}$ bilden einen Inzidenzraum, da

I1 erfüllt ist, da es <u>keine</u> zwei unterschiedlichen Punkte gibt und damit keinen Widerspruch zur Aussage!

I2 erfüllt ist, da es <u>keine</u> Gerade gibt und damit keinen Widerspruch zur Aussage!

Merke „Aussagen über die leere Menge sind immer wahr"

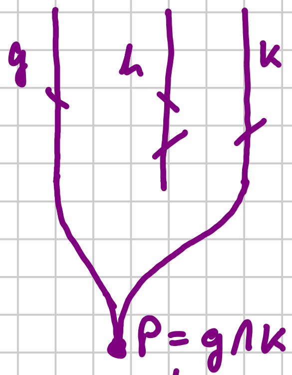
T9 Vorbemerkung: g, h heißen parallel $\Leftrightarrow g \parallel h$ oder $g = h$

Beh: Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation

d.h. $g \parallel g$ (reflexiv) klar

$g \parallel h \Leftrightarrow h \parallel g$ (symmetrisch) klar

$g \parallel h \wedge h \parallel k \Rightarrow g \parallel k$



$g \neq h \Rightarrow P \notin h$

Beweis der Transitivität

Seien $g \parallel h$ und $h \parallel k$ und $P = g \wedge k$

dann gilt:

$g = $ Parallele zu h durch $P = k$

$\uparrow$ da $P \in g$ — diese ist eindeutig — $\uparrow$ da $P \in k$

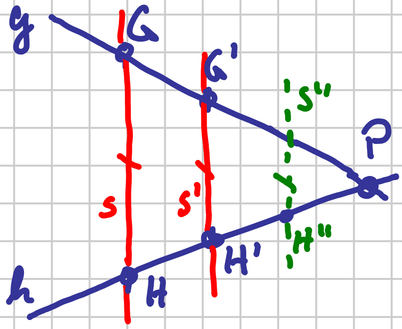
$\Rightarrow g = k \Rightarrow$ Beh.

a) Teil 1: Seien $g, h \in \mathfrak{G}$ zwei Geraden $g \neq h$, so liegen auf ihnen von Voraussetzung endlich viele Punkte.

Zu zeigen ist also, dass alle Geraden gleich viele Punkte (d.h. q-Punkte) enthalten.

Fall 1: $g \nparallel h$ ($\Leftrightarrow \exists P \in E$ mit $g \cap h = P$)

Wähle Punkt $G \in g$ mit $G \neq P$ und $H \in h$ mit $H \neq P$ (beachte I2) so liegt $s = GH$ (beachte I1) nicht parallel zu g und zu h



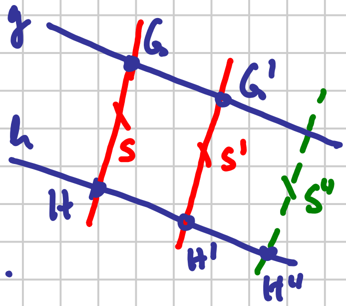
Enthält g einen weiteren Punkt $G' \notin \{P, G\}$, so ist die Parallele s' zu s durch G' eindeutig (vgl. Parallelenaxiom) und nicht parallel zu h, da aus $s \parallel s' \parallel h \Rightarrow s \parallel h$ ↯

Transitivität

Das heißt $\exists\, H' = h \cap s' \in E$

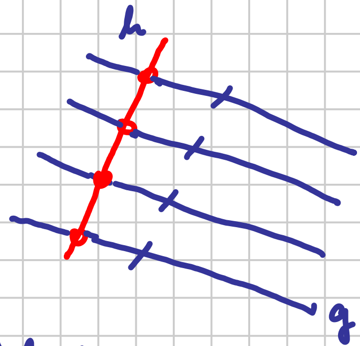
Damit schneiden die q Parallelen zu s durch die q Punkte von g die Gerade h in q Punkten.
<u>Annahme</u> h enthält einen weiteren Punkt H'', so müsste die Parallele s'' zu s durch H'' die Gerade g in einem weiteren Punkt G'' treffen ↯ oder s'' wäre Verbindungsgerade von H'' mit einem der q Punkte von g z.B. G' mit $s' \parallel s''$ ↯ zu E2!

<u>Fall 2:</u> $g \parallel h$



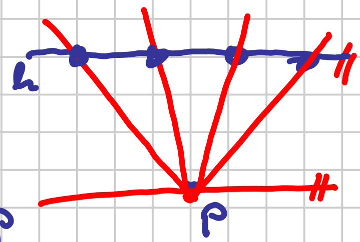
Wähle Punkt $G \in g$ und Punkt $H \in h$ so liegt $s = GH$ nicht parallel zu g und zu h $\Rightarrow$ wie oben die Behauptung.

<u>2. Teil</u> Wähle $h \nparallel g$ (beachte E1) dann gibt es durch jeden der q Punkte von h genau eine Parallele zu g (vgl. Parallelenaxiom)



<u>Annahme</u> Es gäbe eine weitere Parallele k zu g, so gäbe es einen weiteren Punkt $k \cap h$ auf h ↯ <u>oder</u> $k \parallel h$ und damit $g \parallel k \parallel h \Rightarrow g \parallel h$ ↯. $\Rightarrow$ Behauptung

b) Wähle Gerade h und $P \notin h$ (beachte E1)
$\overset{(I1)}{\underset{(P)}{\Rightarrow}}$ q Verbindungsgeraden von P mit den q Punkten von h und <u>genau</u> <u>eine</u> Parallele zu h durch P



<u>Annahme</u> Es gäbe eine weitere Gerade k durch P, so ist $k \neq h$ (vgl. E2). Also gäbe es einen weiteren Punkt $k \cap h$ auf h ↯. $\Rightarrow$ Behauptung.

c) Reines Abzählen an Figur zu b)

Jede der $q+1$ Geraden durch P enthält q Punkte, wobei P nur einmal mitgezählt werden darf

$\Rightarrow |E| = (q+1)\cdot q - q = q^2$

Annahme: Es gäbe einen weiteren Punkt F, der nicht auf den verwendeten Geraden, so gäbe es eine weitere Gerade PF durch P $\lightning$ zu b). $\Rightarrow$ Behauptung

d) 1. Weg Abzählen

Durch jeden der q Punkte einer Geraden g gehen $q+1$ Geraden, wobei g nur einmal mitgezählt und die zu g parallelen Geraden $\neq g$ nicht vergessen werden dürfen

$\Rightarrow |\mathcal{G}| = q(q+1) - (q-1) + (q-1) = q^2+q$

2. Weg Kombinatorik

Es gibt $\binom{q^2}{2}$ Möglichkeiten durch 2 Punkte eine Gerade zu legen, wobei es $\binom{q}{2}$ Möglichkeiten gibt eine bestimmte Gerade durch 2 ihrer Punkte festzulegen

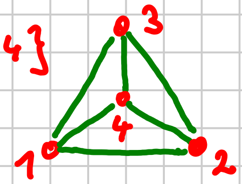
$\Rightarrow |\mathcal{G}| = \binom{q^2}{2} \Big/ \binom{q}{2} = \frac{q^2(q^2-1)}{q(q-1)} = q\cdot(q+1) = q^2+q$

Beispiele

Minimalmodell $q=2$

$|E| = 4$, $|\mathcal{G}| = 6$

$E = \{1,2,3,4\}$



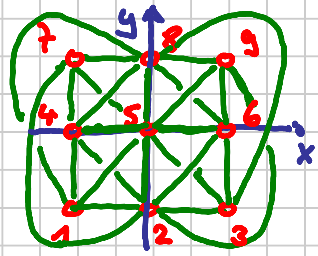
$\mathcal{G} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$

Affine Koordinatenebene über $\mathbb{Z}_3 = \{-1,0,1\}$

Rechnen modulo 3

+	-1	0	1
-1	1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	-1

·	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1



$E = \mathbb{Z}_3^2 = \{1=(-1,-1), 2=(0,-1), 3=(1,-1), 4=(-1,0), 5=(0,0), 6=(1,0), 7=(-1,1), 8=(0,1), 9=(1,1)\}$

$\mathcal{G} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6,9\},\{1,5,9\},\{4,8,3\},\{2,6,7\},\{3,5,7\},\{2,4,9\},\{6,8,1\}\}$

$\{2,6,7\} \in \mathcal{G}$ da $\underbrace{(0,-1)}_{=2}+(1,1)=(1,0)=6$ und $(1,0)+(1,1)=(-1,1)=7$

$\{1,6,7\} \notin \mathcal{G}$ sonst wäre $\{2,6,7\}$ nicht eindeutig