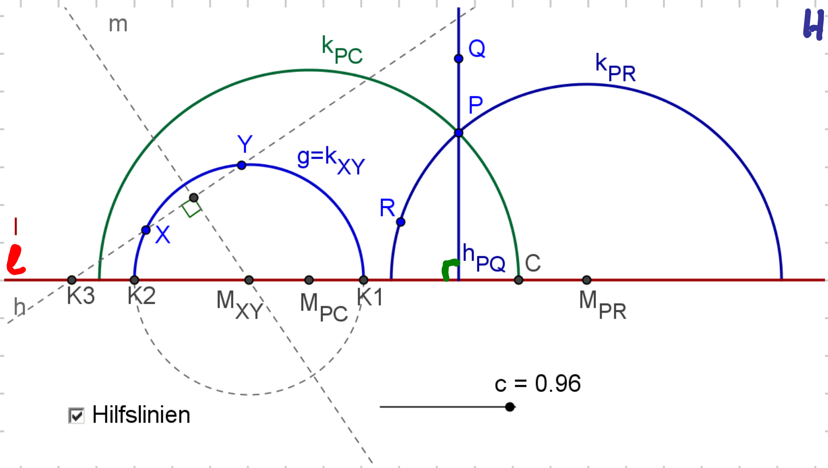
WS 2010/11 Geometrie 1 LB   Hausaufgaben Blatt 3

Notiztitel   11.11.2010

H5 Vorbem. Ein Kreis schneidet in $\mathbb{R}^2$ eine Gerade orthogonal
$\Leftrightarrow$ wenn die Gerade den Kreismittelpunkt enthält.



H Punktmenge $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ obere Halbebene
Geradenmenge $\mathcal{G} = \{$Halbkreise in H um Mittelpunkte auf $l: y=0\} \cup \{$Halbgeraden in $H \perp l\}$

a) Zu zeigen: $(H, \mathcal{G})$ ist ein Inzidenzraum,

I1: Zu $X, Y \in H$ (Punktmenge) mit $X \neq Y$ gibt es genau ein $g \in \mathcal{G}$ (Menge der Geraden $\subset$ Potenzmenge von H) mit $X, Y \in g$

I2: Für alle $g \in \mathcal{G}$ gilt: g enthält mind. 2 Punkte klar!

Zu I1 Fallunterscheidung nach Lage der Verbindungsgeraden $h = XY$ in $\mathbb{R}^2$ zu l: Mittellot zu X, Y in $\mathbb{R}^2$

Fall 1: XY nicht senkrecht zu l $\Rightarrow M_{xy} = m_{xy} \cap l$ ist eindeutig $\Rightarrow g = k_{xy} = k(M_{xy}, X) \cap H$ Halbkreis über K1K2 (1)
Kreis um M_{xy} durch X und Y.

Fall 2: XY senkrecht zu l $\Rightarrow g = h_{xy} = XY \cap H$ Halbgerade K3X (2)

(1) $\vee$ (2) $\Rightarrow$ Verbindungsgerade zu X und Y in $(H, \mathcal{G})$ eindeutig

b) Zu $g = k_{xy}$ gibt es offensichtlich ∞ viele $k \in \mathcal{G}$ durch $P \in H \setminus g$ mit $g \cap k = \emptyset$ vgl in Skizze k_{PR} oder h_{PQ} oder k_{PC}, wobei man mit dem Schieberegler c eine Schar „parallelen" Geraden zu g erhält $\Rightarrow$ Parallelenaxiom nicht erfüllt $\Rightarrow$ keine affine Ebene

H6 $P=\{a,b,c,d\}$ leere Menge $\binom{4}{1}=4$ einelem. $\binom{4}{2}=6$ zweielem.

Potenzmenge $(P)=\{\emptyset, \{a\},\{b\},\{c\},\{d\}, \{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},$
$\{b,d\},\{c,d\}, \{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$

$|$Potenzmenge$(P)| = 16 = 2^4$ $\binom{4}{3}=4$ einelem. P selbst

- Annahme $\mathfrak{G}$ sei $\{\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$
dann gäbe es zu $a,b\in P$ zwei verschiedene Geraden $\{a,b,c\}$ und $\{a,b,d\}$ im Widerspruch zu I1.

Zusatz:

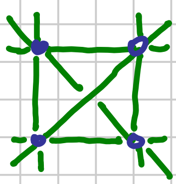
- Annahme $\mathfrak{G}$ sei Teilmenge der 3 elementigen Teilmengen

a) Enthält $\mathfrak{G}$ nur eine dreielementige Teilmenge, so fehlt die Verbindungsgerade zum „vierten" Punkt ↯ zu I1

b) Enthält $\mathfrak{G}$ mindestens zwei dreielementige Teilmengen, so stimmen je zwei davon in zwei Punkten überein ↯ zu I1 wie oben!

- Annahme $\mathfrak{G}=\{\{a,b,c,d\}\}$. Dann ist $(P,\mathfrak{G})$ ein Inzidenzraum, da zu je zwei Punkten aus P genau eine Verbindungsgerade (nämlich $\{a,b,c,d\}$) existiert und I2 auch gilt. Allerdings ist $(P,\mathfrak{G})$ keine affine, da ja alle Punkte von P auf der einzigen Geraden liegen, d.h. keine 3 nicht kollineare Punkte existieren.

- $P=\{a,b,c,d\}$ mit $\mathfrak{G}=\{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}$



bilden einen Inzidenzraum, sogar eine affine Ebene, da es

E1 3 nicht kollineare Punkte gibt, z.B. $c\notin\{a,b\}$

E2 $\{a,b\}\parallel\{c,d\}$; $\{a,c\}\parallel\{b,d\}$ und $\{a,d\}\parallel\{b,c\}$.