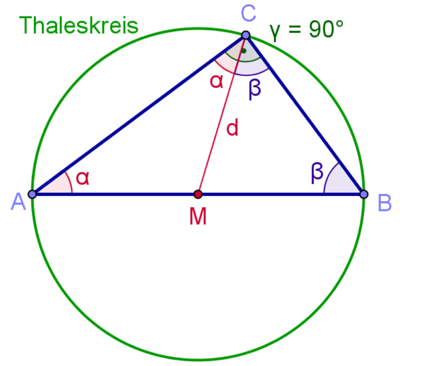
WS 2010/11 Geometrie 1 LB Übungen Blatt 1

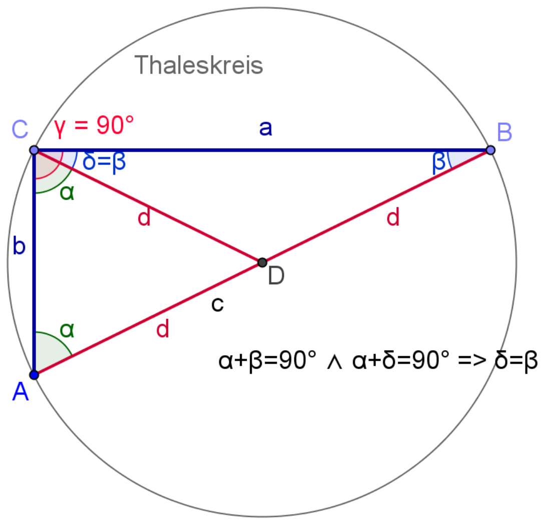
Notiztitel 27.10.2010

T1 Nach Vorlesung gilt:
Jeder Punkt eines Kreises sieht jeden Durchmesser des Kreises unter 90°.
Gilt auch umgekehrt:
Jeder Punkt, der zwei Punkte A und B unter 90° sieht, liegt auf dem Kreis über der Strecke $\overline{AB}$.



Beweis: $2\alpha+2\beta = 180° \Rightarrow \gamma = \alpha+\beta = 90°$

1. Beweis direkt:



- Wähle ein rechtwinkliges Dreieck ABC, $\gamma = \sphericalangle ACB = 90°$.
- Trage den Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC$ in C an der geraden AC nach innen an.
- Schneide die erhaltene Gerade mit der Seite AB und nenne den Schnittpunkt D.

Dann ist das Dreieck ADC gleichschenklig $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{CD}$ (1)

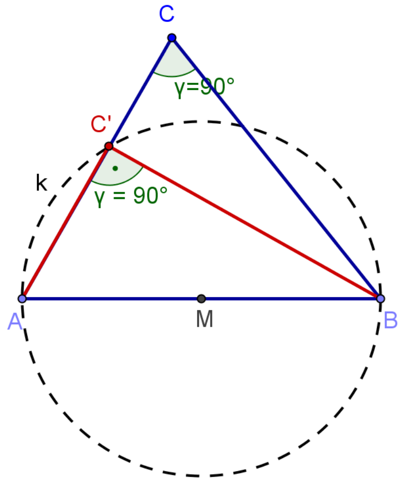
Ferner gilt: $\alpha + \beta = 90°$ (wegen Winkelsumme im Dreieck)

und: $\alpha + \delta = 90°$ (siehe Figur)

$\Rightarrow \delta = \beta \Rightarrow$ Dreieck BCD ist gleichschenklig $\Rightarrow \overline{BD} = \overline{CD}$ (2)

(1) ∧ (2) $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} \Rightarrow$ C liegt auf Kreis über der Strecke $\overline{AB}$. □

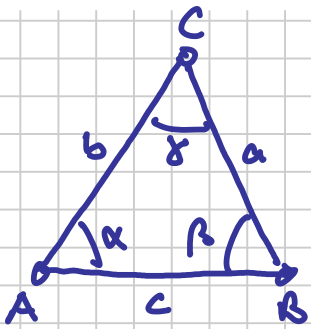
2. Beweis indirekt:



Annahme:
Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Ecke C nicht auf dem Thaleskreis k über der Strecke AB liegt.

Dann schneidet AC (oder BC) den Thaleskreis k in einem Punkt C', sodass das Dreieck ABC' rechtwinklig ist.
Damit hat das Dreieck BCC' aber zwei rechte Winkel im Widerspruch zur Winkelsumme im Dreieck.

T2



- Das Dreieck ABC ist gleichschenklig
  $\Leftrightarrow$ zwei Seiten sind gleich lang
  $\Leftrightarrow$ zwei Winkel sind gleich groß
- Das Dreieck ABC ist rechtwinklig
  $\Leftrightarrow$ ein Winkel hat $90°$.

Das Dreieck ist spitzwinklig $\Leftrightarrow$ alle Winkel $\leq 90°$.

Frage: Wie zeichnet man ein Dreieck so, dass es weder als rechtwinklig noch als gleichschenklig erscheint.

Ziel: Die Winkel α, β, γ (o.E $\alpha \leq \beta \leq \gamma$) sollen sich voneinander und vom rechten Winkel möglichst gut unterscheiden, d.h. die Differenzen

$90° - \gamma =: \varepsilon_1$ (1) sollen „möglichst groß" sein.

$\gamma - \beta =: \varepsilon_2$ (2) Untersuchen wir zunächst, für welche

$\beta - \alpha =: \varepsilon_3$ (3) Dreiecke diese Differenzen gleich sind:

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ (4)

Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma \overset{(2)(3)}{=} \beta - \varepsilon_3 + \beta + \beta + \varepsilon_2 \overset{(4)}{=} 3\beta = 180° \Rightarrow \underline{\beta = 60°}$

Aus (1)+(2) folgt mit (4): $90° - \beta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \overset{(4)}{=} 2\varepsilon$, also $\underline{\varepsilon = 15°}$

damit $\underline{\alpha = 45°}$, $\underline{\gamma = 75°}$

Sind für diese Winkel die Differenzen maximal ?

Annahme: Die maximalen Differenzen seien größer als 15°

(1) $90° - \gamma = 15° + \delta_1$ mit $\delta_1 \geq 0 \Rightarrow \gamma = 75° - \delta_1$

(2) $\gamma - \beta = 15° + \delta_2$ mit $\delta_2 \geq 0 \Rightarrow \beta = \gamma - 15° - \delta_2 = 60° - \delta_1 - \delta_2$

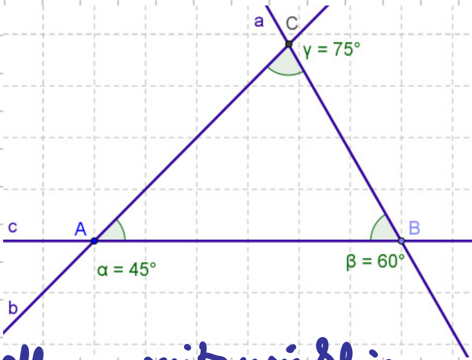
(3) $\beta - \alpha = 15° + \delta_3$ mit $\delta_3 \geq 0 \Rightarrow \alpha = \beta - 15° - \delta_3 = 45° - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3$

Winkelsumme liefert:

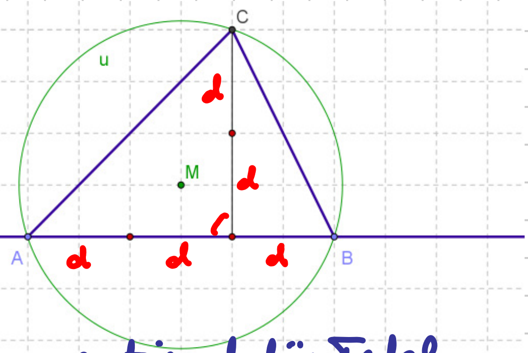
$\alpha + \beta + \gamma = 180° - 3\delta_1 - 2\delta_2 - \delta_3 \overset{!}{=} 180° \Leftrightarrow 0 = -3\delta_1 - 2\delta_2 - \delta_1 \leq 0$.

d.h. $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, d.h. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 15°$ sind maximal!

Ein Dreieck mit den Winkeln 45°, 60°, 75° nennt man allgemeines spitzwinkliges Dreieck. (Bernhard Tergan)



allgem. spitzwinklig



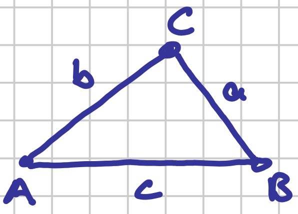
optimal für Tafel

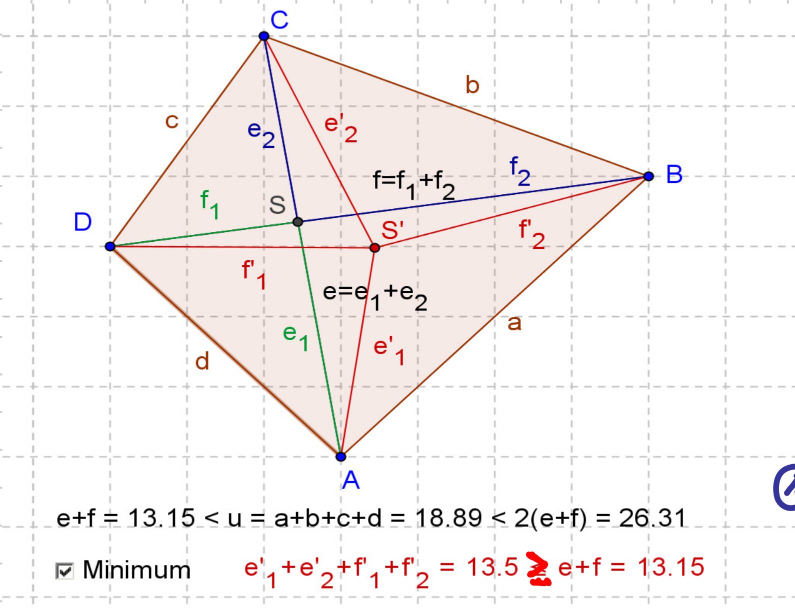
T3 a) Dreiecksungleichung

$a \leq b + c$ (zyklisch)

Gleichheit genau dann

wenn die 3 Punkte auf einer Geraden liegen.





Es gilt:

$e = e_1 + e_2$

$f = f_1 + f_2$

$u = a + b + c + d$

und in den Dreiecken

(1)
$$\left\{\begin{array}{lll} ABC & : & e < a+b \\ BCD & : & f < b+c \\ CDA & : & e < c+d \\ DAB & : & f < d+a \end{array}\right.$$

$\Rightarrow 2(e+f) < (a+b) + (c+d) + (b+c) + (a+d) = 2u$

$\Rightarrow \underline{e + f < u}$

(2)
$$\begin{array}{cccc} (ABS) & (BCS) & (CDS) & (DAS) \\ a < e_1 + f_2\,, & b < f_2 + e_2\,, & c < e_2 + f_1\,, & d < e_1 + f_1 \end{array}$$

$\Rightarrow \underline{u} < (e_1 + f_2) + (f_2 + e_2) + (e_2 + f_1) + (e_1 + f_1) = \underline{2 \cdot (e+f)}$

b) Sei S' ein beliebiger Punkt $\Rightarrow \underset{(AS'C)}{e'_1 + e'_2 \geq e}\,, \quad \underset{(BS'D)}{f'_1 + f'_2 \geq f}$

Gleichheit $\Leftrightarrow$ $S' \in AC$ bzw $S' \in BD$

Summe der Abstände von S aus: $e_1 + e_2 + f_1 + f_2 = e + f$

Summe der Abstände von S' aus: $e'_1 + e'_2 + f'_1 + f'_2 \geq e + f$

$\Rightarrow$ Behauptung Gleichheit $\Leftrightarrow S' \in \overline{AC} \cap \overline{BD} = S$

<u>Zusatz:</u> Welche der beiden Ungleichungen gilt auch für nicht konvexe Vierecke? Die erste $e + f < u$.
Wo liegt dann das Minimum der Abstandssumme?