Geometrie 1 für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T27. Eine Quadrik Q in einem dreidimensionalen euklidischen Raum sei durch eine Gleichung bezüglich kartesischer xyz-Koordinaten gegeben. Nach Einführung homogener Koordinaten sei die Gleichung von Q

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Beschreiben Sie die Gestalt von Q (z.B. durch Angabe der Schnitte mit der xy-, der xz- und der yz-Ebene und mit Parallelebenen zu den Koordinatenebenen).

T28. Eine Quadrik Q in einem dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum habe in homogenen Koordinaten die Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Die Tangentenebene von Q im Punkt $F(0, 1, 1, 0)$ sei die Fernebene. Zeigen Sie:

Auf Q liegen zwei Scharen von Geraden. Alle Geraden der einen Schar sind parallel zu einer Ebene, alle Geraden der anderen Schar sind parallel zu einer anderen Ebene.

T29. Ein Gebäude habe die Form eines halben Ellipsoides Q mit der Gleichung (in kartesischen xyz-Koordinaten)

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12, \quad z \geq 0.$$

Eine Lampe (mit guter Näherung eine punktförmige Lichtquelle) sei im Punkt $P(3, 2, 7)$ angebracht. Wird durch diese Lampe der Punkt auf Q mit den Koordinaten

a) (0,0,2),
b) (0,$\sqrt{6}$,0),
c) (2$\sqrt{3}$,0,0)
beleuchtet, oder liegt er im Eigenschatten von Q?

In welchem Punkt muss die Lichtquelle liegen, damit die 3 gegebenen Punkte auf der Eigenschattengrenze von Q liegen.

Hausaufgaben:

H23. Mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sei eine Quadrik B im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum P^3 in homogenen Koordinaten $(x_0, x_1, x_2, x_3) = \vec{x}^T$ gegeben durch die Gleichung

$$B : \vec{x}^T A \vec{x} = 0.$$

a) Zeigen Sie: Die Punkte $P(\vec{p}) = P(1,1,1,1)$, $Q(\vec{q}) = Q(1,-1,1,-1)$, $R(\vec{r}) = R(1,1,-1,1)$, $S(\vec{s}) = S(1,-1,1,1)$ liegen auf B.

b) Zeigen Sie: Die Geraden $g := PQ$ und $h := RS$ liegen auf B.

c) Zeigen Sie: Die Verbindunggerade des Punktes $G(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q})$ mit dem Punkt $H(\sigma\vec{r} + \tau\vec{s})$ liegt auf B, wenn

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

d) Sei $T(\vec{t}) = T(t_0, t_1, t_2, t_3)$ ein Punkt auf B. Zeigen Sie: Es gibt eine Gerade t durch T, die einen Punkt von g mit einem Punkt von h verbindet.
Hinweis: Schneiden Sie die Tangentenebene von B in T mit g und mit h. Zeigen Sie dann, dass die Verbindungsgerade der beiden Schnittpunkte auf B liegt und den Punkt T enthält.

e) Zeigen Sie: Die Projektivität π, die gegeben ist durch die Abbildungsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

lässt B insgesamt unverändert, führt aber jede der Verbindungsgeraden v aus **c)** in eine Gerade über, die nicht Verbindungsgerade eines Punktes von g mit einem Punkt von h ist.
Hinweis: Zeigen Sie dazu, dass das Bild v' der Verbindungsgeraden entweder g nicht trifft oder mit g zusammenfällt.

f) Zeigen Sie: Durch jeden Punkt von B gehen zwei Geraden, die ganz auf B liegen.

Abgabetermin: Mittwoch, 26. Januar 2011, in der Übung