Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. J. Hartl, Dr. H. Vogel

Geometrie 1 für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T19. a) In einer projektiv erweiterten euklidischen Ebene gebe man in homogenen Koordinaten $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2)^T$ eine Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte $P(\vec{p})$ und $Q(\vec{q})$ an.

b) Zeigen Sie, dass diese Gleichung gegeben ist durch

$$\vec{u}^T \vec{x} = 0$$

und bestimmen Sie $\vec{u}$ in Abhängigkeit von $\vec{p}$ und $\vec{q}$.

T20. Gegeben sei bezüglich homogener Koordinaten in einem n-dimensionalen projektiv erweiterten euklidischen Raum P^n eine Hyperebene H^{n-1} durch ihre Gleichung

$$\vec{u}^T \vec{x} = 0$$

sowie ein Punkt $Z(\vec{z}) \in P^n \setminus H^{n-1}$.

a) Beschreiben Sie die Zentralprojektion aus dem Zentrum Z auf die Hyperebene H^{n-1}, die jedem Punkt $X(\vec{x}) \in P^n \setminus \{Z\}$ einen Bildpunkt $Y(\vec{y}) \in H^{n-1}$ zuordnet, durch eine Gleichung der Gestalt

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

mit einer $(n+1, n+1)$-Matrix A, die nicht von $\vec{x}$ abhängt. Bestimmen Sie dabei die Matrix A möglichst ohne Divisionen.

b) Was ist $A\vec{z}$?

c) Was ist $A\vec{x}$, wenn $X \in H^{n-1}$?

T21. Eine allgemeine Kegelschnittgleichung in einer euklidischen Ebene hat die Gestalt:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0. \qquad (*)$$

Dabei ist $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$.

a) Schreiben Sie die Kegelschnittgleichung in homogenen Koordinaten $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2)^T$ in Matrixform in der Gestalt

$$\vec{x}^T A\vec{x} = 0.$$

Geben Sie dazu A explizit an.
Lässt sich die Gleichung mit einer symmetrischen Matrix $A^T = A$ darstellen ?

b) In einer projektiv erweiterten euklidischen Ebene P^2 seien ein Kegelschnitt k gegeben durch die Gleichung

$$k : \vec{x}^T A\vec{x} = 0 \qquad \text{mit} \quad \det(A) \neq 0,\ A^T = A.$$

und $P(\vec{p})$ ein Punkt von k, also $\vec{p}^T A\vec{p} = 0$.

Zeigen Sie: Der Kegelschnitt k besitzt in P genau eine Tangente g, und diese hat die Gleichung

$$g : \vec{p}^T A\vec{x} = 0.$$

Genauer: Durch den Punkt P gibt es genau eine Gerade g, für die gilt: g hat mit k genau den einen Punkt P und keinen weiteren Punkt gemeinsam.

Hausaufgaben:

H16. Im projektiv erweiterten euklidischen Raum P^3 seien durch die homogenen Koordinaten $\vec{a} = (1,2,0,1)^T, \vec{b} = (0,1,2,1)^T, \vec{c} = (1,0,2,1)^T, \vec{z} = (0,1,2,0)^T, \vec{x} = (1,0,0,1)^T$ fünf Punkte $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), Z(\vec{z})$ und $X(\vec{x})$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die homogene Gleichung der Ebene $\varepsilon = ABC$.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $Z(\vec{z})$ nicht in der Ebene ε liegt.

c) Bestimmen Sie die Gleichung $\vec{y} = M\vec{x}$ der Zentralprojektion aus dem Zentrum $Z(\vec{z})$ auf die Ebene ε.

d) Bestimmen Sie die homogenen Koordinaten $\vec{y}$ des Bildpunktes $Y(\vec{y})$ von $X(\vec{x})$ unter dieser Zentralprojektion.

H17. Bekanntlich hat in der euklidischen Ebene die Hyperbel $h : xy = \frac{1}{2}$ die Asymptoten $x = 0$ und $y = 0$.

a) Geben Sie die Gleichung von h in homogenen Koordinaten an und betrachten Sie nun h als Kegelschnitt in der projektiv erweiterten euklidischen Ebene.

b) Ermitteln Sie die Schnittpunkte H_1, H_2 von h mit der Ferngeraden.

c) Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der Tangente g_1, g_2 von h in jedem der beiden Punkte H_1, H_2.

d) Vergleichen Sie g_1, g_2 mit den beiden Asymptoten.

H18. In der projektiv erweiterten euklidischen Ebene seien die Hyperbel $h : 4x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$ sowie durch die homogenen Koordinaten $\vec{p} = (\sqrt{3}, 4, 2)^T, \vec{q} = (1,2,6)^T$ zwei Punkte $P(\vec{p})$ und $Q(\vec{q})$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass P auf der Hyperbel h liegt und bestimmen Sie die Tangente im Punkt $P(\vec{p})$ an den Kegelschnitt.

b) Bestimmen Sie alle Tangenten von h, die den Punkt Q enthalten. Geben Sie dabei auch die zugehörigen Berührpunkte an.

c) Geben Sie die Asymptoten von h an und skizzieren Sie h mit Hilfe der gefundenen Tangenten und Berührpunkte in einem euklidischen Koordinatensystem.

Hinweis zu c): Nutzen Sie die Symmetrie der Hyperbel zur x- und zur y-Achse.

Abgabetermin: Mittwoch, 22. Dezember 2010, in der Übung