

Eine moderne Axiomatik der euklidischen Geometrie findet man zum Beispiel in dem Buch "Einführung in die Geometrie" von Helmut Karzel, Kay Sörensen und Dirk Windelberg, Vandenhoeck & Ruprecht in Göttingen, 1973. Es werden schrittweise weitere Axiome eingeführt und die dadurch beschriebenen Strukturen immer spezieller. Einige der Axiome lauten so:

Es seien  $P$  eine Menge, deren Elemente wir **Punkte**, und  $\mathfrak{G}$  eine Teilmenge der Potenzmenge von  $P$ , deren Elemente wir **Geraden** nennen. Das Paar  $(P, \mathfrak{G})$  heißt **Inzidenzraum**, wenn folgende Axiome gelten:

**I 1** Zu  $x, y \in P$  mit  $x \neq y$  gibt es genau ein  $G \in \mathfrak{G}$  mit  $x, y \in G$ .

**I 2** Für alle  $G \in \mathfrak{G}$  gilt  $|G| \geq 2$ .

Ein Inzidenzraum  $(E, \mathfrak{G})$  heißt **affine Ebene**, wenn gilt:

**E 1** Es gibt drei nicht-kollineare Punkte.

**P (Parallelenaxiom)** Zu jedem Paar  $(x, G) \in E \times \mathfrak{G}$  mit  $x \notin G$  gibt es genau ein  $H \in \mathfrak{G}$  mit  $x \in H$  und  $G \cap H = \emptyset$ .

Eine affine Ebene  $(E, \mathfrak{G})$  heißt **desarguesch**, wenn in ihr das **affine Axiom von Desargues AD** erfüllt ist:

**AD** Es seien  $G_1, G_2, G_3$  drei verschiedene Geraden, die mit einem Punkt  $z$  inzidieren. Für  $i \in \{1, 2, 3\}$  seien  $a_i, b_i$  sechs verschiedene Punkte mit  $a_i, b_i \in G_i$ . Dann folgt aus  $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{b_1, b_2}$  und  $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{b_2, b_3}$  auch  $\overline{a_1, a_3} \parallel \overline{b_1, b_3}$ .

Eine affine Ebene  $(E, \mathfrak{G})$  heißt **pappussch**, wenn sie dem **affinen Axiom von Pappus AP** genügt:

**AP** Es seien  $G_1, G_2$  zwei verschiedene Geraden und  $a_1, a_2, \dots, a_6$  sechs verschiedene Punkte mit  $a_1, a_3, a_5 \in G_1 \setminus G_2$  und  $a_2, a_4, a_6 \in G_2 \setminus G_1$ . Dann folgt aus  $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{a_4, a_5}$  und  $\overline{a_2, a_3} \parallel \overline{a_5, a_6}$  auch  $\overline{a_3, a_4} \parallel \overline{a_6, a_1}$ .

Ein Inzidenzraum  $(P, \mathfrak{G})$  heißt **affiner Raum**, wenn jede Ebene von  $(P, \mathfrak{G})$  eine affine Ebene ist und wenn  $\parallel$  transitiv ist.

Es sei  $M$  eine Menge und  $M^{3'} := \{(x, y, z) \in M^3 : x \neq y, z\}$ .

Eine Abbildung

$$(|, \cdot) : M^{3'} \rightarrow \{1, -1\} \\ (x, y, z) \rightarrow (x|y, z)$$

heißt **Zwischenrelation**, wenn die drei folgenden Aussagen gelten:

**(Z1)**  $(a|b, c)(a|c, b)$  für alle  $(a, b, c) \in M^{3'}$ .

**(Z2)**  $(a|b, c)(a|c, d) = (a|b, d)$  für alle  $a, b, c, d \in M$  mit  $a \neq b, c, d$ .

**(Z3)** Für drei verschiedene Elemente  $a, b, c \in M$  ist genau einer der Werte  $(a|b, c)$ ,  $(b|c, a)$  oder  $(c|a, b)$  gleich -1. Man sagt  $c$  liegt zwischen  $a$  und  $b$ , wenn

$(c|a, b) = -1$  ist.

Soweit der Wortlaut von Axiomen nach Karzel / Sörensen / Windelberg.

Es werden dann **angeordnete Ebenen** definiert und **Kongruenzaxiome** eingeführt. Alle Sätze, die man damit beweisen kann, gehören zur **absoluten Geometrie**.

Nimmt man in der ebenen Geometrie das **Parallelenaxiom P** hinzu,

**P** Zu jedem Paar  $(x, G) \in E \times \mathfrak{G}$  mit  $x \notin G$  gibt es genau ein  $H \in \mathfrak{G}$  mit  $x \in H$  und  $G \cap H = \emptyset$ .

so kommt man zur **euklidischen Geometrie**,

nimmt man hingegen

$\neg \mathbf{P}$  Es gibt  $G, H_1, H_2 \in \mathfrak{G}$  und  $p \in E \setminus G$  mit  $H_1 \cap H_2 = p$  und  $H_1 \cap G = H_2 \cap G = \emptyset$ .

hinzu, so kommt man zur **hyperbolischen Geometrie**.