4.2.4 Polarität als Realisierung des Dualitätsprinzips

Ist $\vec{x}^T A \vec{x} = 0$ mit $A \neq 0$, $A^T = A$, die Gleichung einer nichtentarteten Quadrik Q in P^n, so ist $\det A \neq 0$ und $A\vec{p} \neq \vec{o}$ für alle $P(\vec{p}) \in P^n$. Die Abb. $P(\vec{p}) \mapsto U(\vec{u})$, $\vec{u} = A\vec{p}$ ist bijektiv. Wir interpretieren $\vec{u}$ als (homogenen) Koordinatenvektor einer Hyperebene in P^n.

Die Gleichung

$$\vec{p}^T A \vec{x} = 0$$

bestimmt für $P(\vec{p}) \in P^n$ die Polarhyperebene $U = \Gamma_P$ von P bezüglich Q, für $P \in Q$ die Tangentenhyperebene von Q im Punkt P.

Einschub: Ist Q nichtentartet, und kommt in der NF genau ein „$-$" vor, und ist $P(\vec{p}) \in Q$, so ist $\Gamma_P \cap Q = \{P\}$.

Bew.: Wir verwenden die NF:

$$Q: \quad x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Gamma_P: \quad p_0 x_0 + p_1 x_1 + \dots + p_{n-1} x_{n-1} - p_n x_n = 0 \qquad (2)$$

$$\text{mit} \quad p_0^2 + p_1^2 + \dots + p_{n-1}^2 - p_n^2 = 0 \qquad (3)$$

Aus (2), (3):

$$x_n = \frac{1}{p_n}\left(p_0 x_0 + \dots + p_{n-1} x_{n-1}\right) = \pm \frac{p_0 x_0 + \dots + p_{n-1} x_{n-1}}{\sqrt{p_0^2 + \dots + p_{n-1}^2}}$$

In (1):

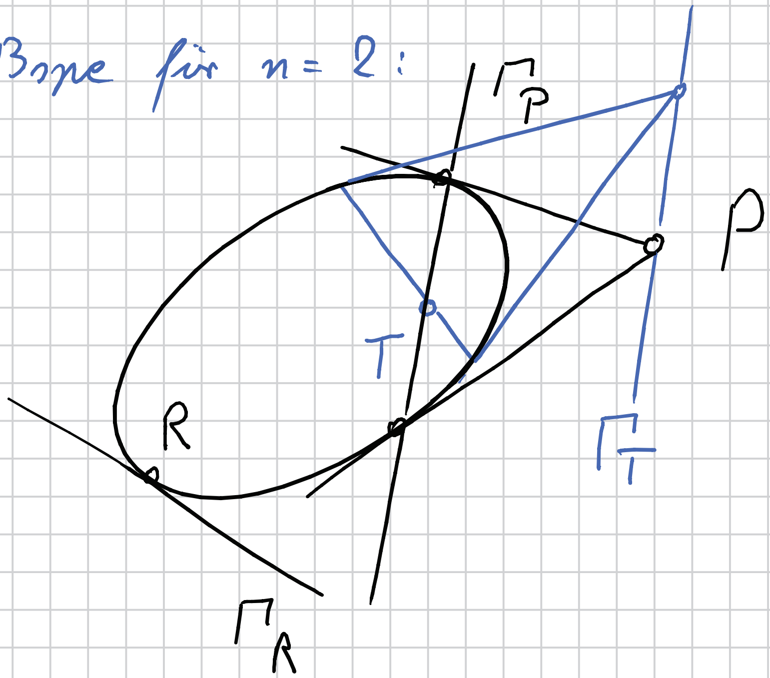
$$x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 = \frac{(p_0 x_0 + \dots + p_{n-1} x_{n-1})^2}{p_0^2 + \dots + p_{n-1}^2}$$

Aber: Die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung besagt:

$$(p_0 x_0 + \dots + p_{n-1} x_{n-1})^2 \le (p_0^2 + \dots + p_{n-1}^2)(x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2)$$

Gleichheit gilt nur, wenn $(p_0, \dots, p_{n-1})$ und $(x_0, \dots, x_{n-1})$ l. a., also (mit (2), (3)), wenn $X(\vec{x}) = P(\vec{p})$.

Bsp. für $n = 2$:



Bsp. für $n = 3$: