$$\underbrace{\left(x_0+x_1+2x_2\right)}_{=:x_0''}{}^2+x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3-4x_2^2=0$$

$$x_0''^2+x_1^2+2x_1\left(-2x_2+2x_3\right)+\left(-2x_2+2x_3\right)^2$$

$$-\left(-2x_2+2x_3\right)^2-4x_2^2=0$$

$$x_0''^2+\underbrace{\left(x_1-2x_2+2x_3\right)}_{=:x_1''}{}^2-8x_2^2+8x_2x_3-4x_3^2=0$$

$$x_0''^2+x_1''^2-\left[\left(2\sqrt{2}\,x_2\right)^2-2\cdot\left(2\sqrt{2}\,x_2\right)\cdot\sqrt{2}\,x_3+\left(\sqrt{2}\,x_3\right)^2\right]$$

$$+2x_3^2-x_3^2=0$$

$$x_0''^2+x_1''^2-\underbrace{\left(2\sqrt{2}\,x_2+\sqrt{2}\,x_3\right)}_{=:x_2''}{}^2+\underbrace{x_3}_{=:x_3''}{}^2=0$$

Mit
$$\begin{pmatrix}x_0''\\x_1''\\x_2''\\x_3''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&-2&2\\0&0&2\sqrt{2}&\sqrt{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

erhält man die Quadrikgleichung

$$x_0''^2+x_1''^2-x_2''^2+x_3''^2=0.$$

Das ist noch nicht die NF. Aufgrund des Vorgehens ist die Transformationsmatrix eine obere Dreiecksmatrix mit nicht verschwindenden Diagonalelementen, also mit Determinante $\neq 0$.

Mit der Umnummerierung der Koordinaten:

$$x_0':=x_0'',\ x_1':=x_1'',\ x_2':=x_3'',\ x_3':=x_2''$$

erhält man die Normalform

$$x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0.$$

Was kann noch vorkommen?

z.B. $x_0^2 + 2x_1x_2 = 0$ Quadratische Ergänzung:

$$(x_0 + x_1)^2 - x_2^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Das ergänzt man irgendwie, so dass die Matrix regulär wird.

z.B. $x_0 x_1 = 0$ Quadratische Ergänzung nicht möglich! Trick:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 =: x_0' - x_1' \\ x_1 =: x_0' + x_1' \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 x_1 = x_0'^2 - x_1'^2$$

Damit hat man Quadrate erhalten und kann gegebenenfalls weiter quadratisch ergänzen.