TOPOLOGIE UND KOMBINATORIK (WS 09/10)

BERNHARD HANKE

Der erste Teil der vorliegenden Vorlesung bezieht sich in weiten Teilen auf das Buch

J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer 2003,

das wir im folgenden mit [M] zitieren.

Unsere Vorlesung setzt die Kenntnis der topologischen Grundbegriffe voraus. Fehlende Kenntnisse können mit meinem Skript zur Einführung in die Topologie ergänzt werden.

1. Grundzüge der simplizialen Homologie

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Ein *affines n-Simplex* (oder auch *n-dimensionales Simplex*) im $\mathbb{R}^N$ (wobei $0 \leq n \leq N$) ist die konvexe Hülle von $n+1$ affin unabhängigen Punken $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^N$. Affin unabhängig bedeutet, dass die Vektoren $p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^N$ sind. Diese konvexe Hülle ist gegeben durch $\{\sum_{i=0}^n t_i p_i \mid 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^N$. Wir nennen $p_0, \ldots, p_n$ die *Ecken* dieses affines Simplex. Die konvexe Hülle einer (nicht notwendig echten) Teilmenge von $\{p_0, \ldots, p_n\}$ heißt *Seite* des affinen n-Simplex. Diese Seiten sind selbst affine Simplizes. Ein *endlicher geometrischer Simplizialkomplex* im $\mathbb{R}^N$ ist eine Menge $\mathcal{S}$ endlich vieler affiner Simplizes im $\mathbb{R}^N$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Ist $K \in \mathcal{S}$ und $T \subset K$ eine Seite von T, so ist $T \in \mathcal{S}$.
- Sind $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$, so ist $K_1 \cap K_2$ eine Seite von K_1 und von K_2 oder leer.

Die Vereinigung $\bigcup_{K \in \mathcal{S}} K \subset \mathbb{R}^N$ (mit der Teilraumtopologie) wird der zu $\mathcal{S}$ gehörende *Polyeder* genannt und mit $|\mathcal{S}|$ bezeichnet. Der Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ heißt *Triangulierung* von $|S|$. Eine feste Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ kann durchaus verschiedene Triangulierungen besitzen. Allgemeiner nennen wir einen topologischen Raum X *triangulierbar*, falls X homöomorph zum Polyeder eines endlichen geometrischen Simplizialkomplexes im $\mathbb{R}^N$ ist. Einen festen Homöomorphismus dieser Art nennen wir dann *Triangulierung* von X.

Ein *geordneter geometrischer Simplizialkomplex* im $\mathbb{R}^N$ ist ein geometrischer Simplizialkomplex $\mathcal{S}$ zusammen mit einer totalen Ordnung auf der Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^N$, die als Ecken von Simplizes in $\mathcal{S}$ auftreten. Ist $K \in \mathcal{S}$ ein Simplex in einem geordneten Simplizialkomplex mit Ecken $v_0, \ldots, v_n$, so bezeichnen wir dieses Simplex mit $\langle v_0, \ldots, v_n \rangle$ falls mit der induzierten Ordnung $v_0 < v_1 < \ldots < v_k$ gilt. Es sei nun $\mathcal{S}$ ein geordneter geometrischer Simplizialkomplex. Eine *simpliziale n-Kette* in $\mathcal{S}$ ist eine formale Linearkombination

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma \,,$$

wobei $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}$ die Menge der geordneten n-dimensionalen Simplizes bezeichnet und $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$ für alle $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Wir bezeichnen mit $C_n(\mathcal{S})$ die Menge der simplizialen n-Ketten. Diese Menge besitzt offensichtlich die Struktur einer abelschen Gruppe (durch Addition der Koeffizienten in $\mathbb{Z}$). Wir könne als Koeffizienten λ_σ in den formalen Linearkombinationen auch Elemente einer anderen abelschen Gruppe G zulassen. Wir erhalten dann die abelsche Gruppe $C_n(\mathcal{S}; G)$ der simplizialen Ketten *mit Koeffizienten in G*.

Eine n-Kette kann nicht direkt als geometrisches Objekt interpretiert werden, die auftretenden Simplizes selbst sind aber geometrische Objekte und dies erlaubt es uns, gewisse geometrische Operationen auf diese formalen Ketten zu übertragen. Speziell geht es hier um den Übergang von einem n-Simplex auf seinen Rand. Dieser ist geometrisch gesehen einfach die Vereinigung seiner $(n-1)$-dimensionalen Seiten. Diese Seiten müssen aber noch "richtig" orientiert werden: Ist $\langle p_0, \ldots, p_n \rangle \in \mathcal{S}$ ein (orientiertes) n-Simplex, so setzen wir

$$\partial \langle p_0, \ldots, p_n \rangle := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \langle p_0, \ldots, \hat{p}_i, \ldots, p_n \rangle$$

wobei der Hut bedeutet, dass die i-te Ecke in dem betreffenden Simplex weggelassen wird (es handelt sich also um die der entsprechenden Ecke gegenüberliegende $(n-1)$-dimensionale Seite). Auf der rechten Seite steht nun tatsächlich wieder eine formale Linearkombination von (geordneten) $(n-1)$-Simplizes. Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\partial_n : C_n(\mathcal{S}) \to C_{n-1}(\mathcal{S}) \,.$$

Einzelne Simplizes in $\mathcal{S}$ haben immer einen nichtleeren Rand (falls die Dimension mindestens 1 ist), aber es kann durchaus vorkommen, dass für eine Kette $c \in C_n$ gilt $\partial c = 0$. So eine Kette entspricht dann einem "geschlossenen" (d.h. randlosen) geometrischen Gebilde in $\mathcal{S}$ und wird *n-Zykel* genannt. Es sei

$$Z_n(\mathcal{S}) := \ker \partial_n \subset C_n(\mathcal{S})$$

die Gruppe der n-Zykeln (wir setzen $\partial_0 = 0$, also $Z_0(\mathcal{S}) = C_0(\mathcal{S})$). Homologie zählt nun in gewisser Weise n-Zykeln, aber gewisse n-Zykeln werden ignoriert, nämlich die *n-Ränder*. Dazu beachte man die in folgender Proposition gegebene fundamentale Beziehung:

Proposition 1.1. *Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.*

Proof. Nur die Fälle $n \geq 2$ sind interessant. Wir rechnen

$$\begin{aligned}\partial_{n-1} \circ \partial_n \langle v_0, \ldots, v_n \rangle &= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \langle v_0, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n \rangle + \\ &\quad \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \langle v_0, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, \hat{v_j}, \ldots, v_n \rangle .\end{aligned}$$

Diese Summe ist 0, denn vertauscht man in der zweiten Summe i und j, so erhält man das Negative der ersten Summe. □

Geometrisch entspricht dies der Aussage "Ränder von Rändern sind leer". Bezeichen wir mit

$$B_n(\mathcal{S}) := \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset C_n(\mathcal{S})$$

die Untergruppe der n-Ränder, so ist also $B_n(\mathcal{S})$ in Wirklichkeit schon Untergruppe von $Z_n(\mathcal{S})$. Die n-Zykel, die einfach nur n-Ränder sind, werden nun in der Homologie nicht gezählt (sondern in gewisser Weise nur die "wesentlichen" n-Zykel). Die *n-te Homologiegruppe $H_n(\mathcal{S})$* des gegebenen geordneten Simplizialkomplexes $\mathcal{S}$ ist somit definiert als die Quotientengruppe

$$H_n(\mathcal{S}) := Z_n(\mathcal{S})/B_n(\mathcal{S}) .$$

D.h. ein Element in $H_n(\mathcal{S})$ wird durch einen n-Zykel $c \in Z_n(\mathcal{S})$ repräsentiert und zwei n-Zykel $c, d \in Z_n(\mathcal{S})$ repräsentierten die gleiche Homologieklasse, falls $c - d$ ein Rand ist, d.h. falls es ein $x \in C_{n+1}(\mathcal{S})$ gibt mit $\partial x = c - d$. In dieser Diskussion können wir mit einer beliebigen abelschen Gruppe G von Koeffizieten arbeiten und erhalten entsprechend die Gruppe der n-Zykeln $Z_n(\mathcal{S}; G)$, der n-Ränder $B_n(\mathcal{S}; G)$ und der n-ten Homologie $H_n(\mathcal{S}; G)$ *mit Koeffizienten in G*.

Beispiel. Es seien $p_0 := (0,0), p_1 := (1,0), p_2 := (0,1) \in \mathbb{R}^2$ mit der durch die Indizes angedeuteten totalen Ordnung. Weiterhin sei

$$\mathcal{S} := \{\langle p_0 \rangle, \langle p_1 \rangle, \langle p_2 \rangle, \langle p_0, p_1 \rangle, \langle p_1, p_2 \rangle, \langle p_0, p_2 \rangle\}$$

Dann ist $C_0(\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}^3$ mit Erzeugern $a := \langle p_0 \rangle, b := \langle p_1 \rangle, c := \langle p_2 \rangle$, $C_1(\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}^3$ mit Erzeugern $X := \langle p_0, p_1 \rangle, Y := \langle p_1, p_2 \rangle, Z := \langle p_0, p_2 \rangle$ und $C_i(\mathcal{S}) = 0$ für alle $i > 1$. Weiterhin ist

$$\partial X = b - a, \ \partial Y = c - b, \ \partial Z = c - a .$$

Somit gilt $H_0(\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}$ mit Erzeuger $[a]$ (die Eckigen Klammern deuten Übergang zu Restklassen in der Homologie an; insbesondere ist $[a] = [b] = [c]$) und $H_1(\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}$ mit Erzeuger $[X + Y - Z]$, $H_i = 0$ für alle $i > 1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir das *geometrische Standard-n-Simplex*

$$\Delta^n := \{\sum_{i=0}^{n} t_i e_i \mid 0 \le t_i \le 1 \, , \sum t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \, .$$

Dabei bezeichnet $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, $0 \le i \le n$, den i-ten Standard-Basisvektor. Die Menge $\{e_0, \ldots, e_n\}$ ist durch die Indizes total geordnet. Das Simplex Δ^n besitzt eine kanonische Triangulierung (gegeben als die Menge aller seiner Seiten).

Die simplizialen Homologiegruppen sind funktoriell: Es seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ geordnete geometrische Simplizialkomplexe, sowie

$$f : |\mathcal{S}| \to |\mathcal{T}|$$

eine stetige Abbildung zwischen den zugehörigen Polyedern.

Definition. Wir nennen f *simplizial* (und schreiben in diesem Fall auch $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$), wenn folgendes gilt: Ist $\langle p_0, \ldots, p_n \rangle$ ein geordnetes n-dimensionales Simplex in $\mathcal{S}$, so sind die Punkte $f(p_0), \ldots, f(p_n)$ die Ecken eines Simplex in $\mathcal{T}$ (möglicheweise kleinerer Dimension). Weiterhin ist die Einschränkung von f auf das Simplex $\langle p_0, \ldots, p_n \rangle$ affin, also gegeben durch

$$f(\sum t_i p_i) = \sum t_i f(p_i) \, .$$

Ist $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung, so definieren wir Abbildungen $f_n : C_n(\mathcal{S}) \to C_n(\mathcal{T})$, $n \in \mathbb{N}$, wie folgt. Es sei $\sigma = \langle p_0, \ldots, p_n \rangle$ ein geordnetes n-Simplex in $\mathcal{S}$. Sind die Punkte $f(p_0), \ldots, f(p_n)$ nicht paarweise verschieden, so setzen wir $f_n(\sigma) := 0$. Sind diese Punkte paarweise verschieden, so gibt es eine eindeutig bestimmte Permutation $\tau : \{0, \ldots, n\} \to \{0, \ldots, n\}$, so dass $f(p_{\tau(0)}) < \ldots < f(p_{\tau(n)})$ bezüglich der Ordnung des Simplizialkomplex $\mathcal{T}$. Wir setzen dann

$$f_n(\langle p_0, \ldots, p_n \rangle) := \mathrm{sgn}(\tau) \cdot \langle f(p_{\tau(0)}), \ldots, f(p_{\tau(n)}) \rangle$$

Die Abbildung $f_n : C_n(\mathcal{S}) \to C_n(\mathcal{T})$ ist durch lineare Fortsetzung der so definieren Abbildung gegeben.

Funktorialität bedeutet in diesem Zusammenhang, dass $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ für alle simplizialen Abbildungen $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ und $g : \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ und dass $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$.

Eine direkte Rechnung zeigt:

Proposition 1.2. *Es sei $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung. Dann gilt für die induzierten Abbildungen $f_n : C_n(\mathcal{S}) \to C_n(\mathcal{T})$ für alle $n \geq 1$ die Gleichung*

$$f_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_n \, .$$

Insbesondere gilt $f_n(B_n(\mathcal{S})) \subset B_n(\mathcal{T})$ und $f_n(Z_n(\mathcal{S})) \subset Z_n(\mathcal{T})$. Somit induziert f eine Abbildung $f_n : H_n(\mathcal{S}) \to H_n(\mathcal{T})$.

Falls wir n nicht genauer spezifizieren wollen, schreiben wir f_*.

Mit etwas mehr Aufwand (sogenannten *simplizialen Approximationen* stetiger Abbildungen) kann man sogar das folgende Resultat zeigen (das wir vorerst nicht benötigen):

Satz 1.3. *Es seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ zwei (endliche geometrische) Simplizialkomplexe und es sei $f : |\mathcal{S}| \to |\mathcal{T}|$ eine stetige (nicht unbedingt simpliziale) Abbildung. Dann induziert f Homomorphismen $f_* : H_n(\mathcal{S}) \to H_n(\mathcal{T})$ (jedoch in der Regel keine Homomorphismen $C_n(\mathcal{S}) \to C_n(\mathcal{T})$). Diese Zuordnung ist funktoriell. Insbesondere induziert jeder Homöomorphismus $f : |\mathcal{S}| \approx |\mathcal{T}|$ Isomorphismen $H_n(\mathcal{S}) \cong H_n(\mathcal{T})$ für alle $n \geq 0$.*

Man kann daraus mit nicht sehr viel Aufwand folgern, dass die simplizialen Homologiegruppen in Wirklichkeit Invarianten von triangulierbaren topologischen Räumen sind. Noch allgemeiner definiert man für jeden topologischen Raum X die sogenannten *singulären* Homologiegruppen. Diese stimmen mit den simplizialen Homologiegruppen überein, falls X ein Polyeder eines endlichen geometrischen Simplizialkomplexes ist. Mehr dazu findet man in meinem Skript zur Topologie 1.

Der Vollständigkeit halber führen wir noch die folgenden Begriffe ein, die fundamental für die sogenannte *homologische Algebra* sind.

Definition. Ein *Kettenkomplex* ist ein Paar (C_*, ∂_*) bestehend aus einer Familie $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ abelscher Gruppen und einer Famile $(\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Gruppenhomomorphismen $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$, so dass $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Wir nennen dann $Z_n(C) := \ker \partial_n$ die Gruppe der *n-Zykeln*, $B_n(C) := \operatorname{im} \partial_{n+1}$ die Gruppe der *n-Ränder* und $H_n(C) := Z_n(C)/B_n(C)$ die n-te *Homologiegruppe* von (C_*, ∂_*).

Es seien (C_*, ∂_*) und (D_*, ∂_*) Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $f_* : C_* \to D_*$ ist eine Folge $f_n : C_n \to D_n$ von Gruppenhomomorphismen, die mit den Randoperatoren verträglich sind, d.h. $f_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_n$. Wir erhalten dann induzierte Abbildungen $f_* : Z_*(C) \to Z_*(D)$, $f_* : B_*(C) \to B_*(D)$ und $f_* : H_*(C) \to H_*(D)$

(die wir alle mit f_* bezeichnen). Ein *Kettenisomorphismus* ist eine Kettenabbildung, die eine inverse Kettenabbildung besitzt

Angewandt auf die oben beschriebene Situation heißt das: Ist $\mathcal{S}$ ein geordneter geometrischer Simplizialkomplex, so ist $(C_*(\mathcal{S}), \partial_*)$ ein Kettenkomplex (wir setzen hier $C_n(\mathcal{S}) = 0$, falls $n < 0$). Ist $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ eine simpliziale Abbildung, so ist $f_* : C_*(\mathcal{S}) \to C_*(\mathcal{T})$ eine Kettenabbildung.

2. Borsuk-Ulam-Theorem und Tuckers Lemma

Satz 2.1. *(Borsuk'scher Antipodensatz)[K. Borsuk, 1933] Es sei*

$$f : S^n \to \mathbb{R}^n$$

eine stetige Abbildung. Dann gibt es einen Punkt $x \in S^n$ mit

$$f(x) = f(-x)\,.$$

Eine direkte Folgerung dieses Satzes ist, dass S^n nicht in $\mathbb{R}^n$ eingebettet werden kann.

Alle bekannten Beweise dieses Satzes beruhen auf nichttrivialen topologischen Methoden:

- In meinem Skript zur Topologie 1 findet sich ein Beweis, der auf Homologietheorie beruht.
- In [Bredon, *Topology and Geometry*, 1993, S. 362] ist ein Beweis angegeben, der die Kohomologieringstruktur der reell-projektiven Räume $\mathbb{R}P^n$ benutzt.
- Eine weiterer Zugang benutzt (rudimentäre) Transversalitätstheorie. Hier verweisen wir auf das schöne Buch [V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Prentice Hall 1974]. Eine simpliziale Version dieses Zugangs ist in [M], S. 31 ff. ausgeführt.

Wir wollen in dieser Vorlesung den Zusammenhang mit einem Resultat der kombinatorischen Topologie heraustellen, das gewissermaßen einer diskreten Version des Satzen von Borsuk-Ulam entspricht. Im folgenden bezeichnet B^n den abgeschlossenen Einheitsball in $\mathbb{R}^n$ (bzgl. der euklidischen Norm).

Definition. Wir nennen eine Triangulierung von S^n (gegeben durch einen Homöomorphismus $S^n \approx |\mathcal{S}|$ zum Polyeder eines endlichen geometrischen Simplizialkomplexes $\mathcal{S}$) *antipodal symmetrisch*, falls die Punktspiegelung

$$S^n \to S^n\,,\ x \mapsto -x$$

bezüglich dieser Triangulierung simplizial ist.

Im weiteren Verlauf verwenden wir die folgende Sprechweise: Eine Triangulierung $\mathcal{T}$ von B^n *induziert* eine *antipodal symmetrische* Triangulierung von $S^{n-1} = B^n$, falls folgendes gilt

- die ganz im Rand ∂B^n liegenden Simplizes definieren eine Triangulierung von ∂B^n.
- diese Triangulierung ist antipodal symmetrisch.

Satz 2.2. *(Tuckers Lemma)[A. W. Tucker, 1946] Es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von B^n, die eine antipodal symmetrische Triangulierung von ∂B^n induziert. Weiterhin sei jede Ecke v von $\mathcal{T}$ mit einer Zahl*

$$\lambda(v) \in \{\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n\}$$

versehen, so dass die Abbildung λ antipodal *ist, also*

$$\lambda(-v) = -\lambda(v)$$

für alle Ecken $v \in \partial B^n$. Dann existiert eine komplementäre *Kante in $\mathcal{T}$, d.h. für die beiden Ecken v, w dieser Kante gilt*

$$\lambda(v) = -\lambda(w)\,.$$

Der Satz von Borsuk-Ulam kann daraus wie folgt abgeleitet werden. Angenommen, es sei

$$f : S^n \to \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung mit $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^n$. Dann definiert

$$g : S^n \to S^{n-1}\,,\ x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}\,,$$

eine Abbildung mit

$$g(-x) = -g(x)$$

für alle $x \in S^n$. Durch Einschränkung auf die obere Hemisphäre in $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die wir durch Vergessen der letzten Koordinate mit $B^n \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$ identifizieren, erhalten wir somit eine stetige Abbildung

$$h : B^n \to S^{n-1}$$

deren Einschränkung auf den Rand antipodal ist, also $h(-x) = -h(x)$ für alle $x \in \partial B^n$.

Da h gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass die Implikation

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow \|h(x) - h(x')\| < \sqrt{\frac{1}{n}}$$

für alle $x, x' \in B^n$ richtig ist. Es existiert nun eine Triangulierung $\mathcal{T}$ von B^n mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Durchmesser jedes Simplex dieser Triangulierung (d.h. des Bildes jedes Simplex von $\mathcal{T}$ unter dem gegebenen Homöomorphismus $|\mathcal{T}| \approx B^n$) ist kleiner als δ.
- $\mathcal{T}$ induziert eine antipodal symmetrische Triangulierung von ∂B^n.

Wir können zum Beispiel mit der Standardtriangulierung des *Kreuzpolytops*

$$K^n := \mathrm{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

(also des Einheitsballes bezüglich der l^1-Norm) beginnen und diese genügend oft baryzentrisch unterteilen. Da K^n und B^n kanonisch homöomorph sind (durch Aufblasen des Kreuzpolytops), erhalten wir so die gewünschte, beliebig feine Triangulierung von B^n, die zudem antipodal auf dem Rand ist.

Ist $v = (v_1, \dots, v_n) \in B^n$ eine Ecke dieser Triangulierung, so setzen wir nun

$$i(v) := \min_i \{ |h(v)_i| \geq \sqrt{\frac{1}{n}} \} \in \{1, \dots, n\}$$

(diese Zahl $i(v)$ existiert, denn $\|h(v)\| = 1$) und dann

$$\lambda(v) := \mathrm{sgn}(h(v)_{i(v)}) \cdot i(v) \in \{\pm 1, \dots, \pm n\} .$$

Man beachte hier, dass $h(v)_{i(v)} \neq 0$ nach Definition von $i(v)$. Nach Wahl von δ gilt dann aber für je zwei Ecken v, w, die in einem Simplex von $\mathcal{T}$ liegen, dass

$$\lambda(v) \neq -\lambda(w) ,$$

denn sonst wäre $\|h(v) - h(w)\| \geq 2\sqrt{\frac{1}{n}}$. Dies widerspricht aber der Aussage von Tuckers Lemma.

Bevor wir Tuckers Lemma beweisen, formulieren wir dessen Aussage etwas um. Wir betrachten wieder das Kreuzpolytop

$$K^n \subset \mathbb{R}^n ,$$

Die Standardtriangulierung $\mathcal{S}$ des Randes ∂K^n definiert einen Simplizialkomplex mit Eckenmenge

$$V = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\} .$$

Wir erhalten einen geordneten Simplizialkomplex, wenn wir diese Eckenmenge mit einer beliebigen (totalen) Ordnung versehen. Eine Teilmenge $F \subset V$ spannt in dieser Triangulierung genau dann ein Simplex auf, wenn kein $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert mit $i \in F$ und $-i \in F$. Diese Überlegung zeigt, dass Tuckers Lemma äquivalent zur folgenden Aussage ist.

Proposition 2.3. *Es sei B^n mit einer Triangulierung $\mathcal{T}$ versehen, die eine antipodal symmetrische Triangulierung von ∂B^n induziert. Dann existiert keine simpliziale Abbildung*

$$f : (B^n, \mathcal{T}) \to (\partial K^n, \mathcal{S})$$

so dass $f(-v) = -f(v)$ für alle Ecken $v \in \mathcal{T} \cap \partial B^n$ gilt.

Wir beweisen diese Aussage mit Hilfe simplizialer Homologie. Allerdings benutzen wir diese nur in sehr rudimentärer Form: Wir arbeiten durchwegs auf dem Kettenniveau und benutzen keinerlei nichttrivialen Ergebnisse aus der Homologietheorie (wie topologische Invarianz der Homologiegruppen, etc.).

Wir beweisen zunächst den folgenden Spezialfall von Proposition 2.3: Es sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von K^n, die aus der Standardtriangulierung durch mehrmalige Anwendung der baryzentrischen Unterteilung entsteht. Dann existiert keine simpliziale Abbildung

$$f : (K^n, \mathcal{T}) \to (\partial K^n, \mathcal{S}) \,,$$

die antipodal auf dem Rand ∂K^n ist.

Wir bemerken, dass wir in unserem Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam mit dieser Fassung von Tuckers Lemma auskommen.

Für den Beweis dieser Fassung beobachten wir folgendes. Es seien

$$\begin{aligned} H_k^+ &:= \{x \in \partial K^n \mid x_{k+1} \geq 0, x_{k+2} = \ldots = x_n = 0\} \\ H_k^- &:= \{x \in \partial K^n \mid x_{x+1} \leq 0, x_{k+2} = \ldots = x_n = 0\} \end{aligned}$$

die nördliche, bzw. südliche „Hemisphäre“des Randes des $(k+1)$-dimensionalen Teilpolytops $(\mathbb{R}^{k+1} \times 0) \cap K^n$. Dann induziert $\mathcal{T}$ Triangulierungen von H_k^+ und H_k^- (die wir ebenfalls mit $\mathcal{T}$ bezeichnen).

Wir nehmen nun an, $f : (K^n, \mathcal{T}) \to (\partial K^n, \mathcal{S})$ ist simplizial und antipodal auf dem Rand. Es sei

$$f_* : C_*((K^n, \mathcal{T}); \mathbb{Z}/2) \to C_*((\partial K^n, \mathcal{S}); \mathbb{Z}/2)$$

die induzierte Abbildung zwischen den simplizialen Kettenkomplexen mit $\mathbb{Z}/2$-Koeffizienten (die wir im folgenden nicht immer anschreiben werden). Es sei

$$b_n = \sum_i \sigma_n^i \in C_n(K^n, \mathcal{T})$$

die Kette, die genau aus allen n-Simplizes der Triangulierung $\mathcal{T}$ von K^n besteht. Dann gilt

$$f_*(\partial b_n) = \partial f_*(b_n) = 0 \,,$$

da $(\partial K^n, \mathcal{S})$ gar keine n-Simplizes hat. Die Kette ∂b_n können wir als Kette in $C_{n-1}(\partial K^n, \mathcal{T})$ auffasssen, die jedes $(n-1)$-Simplizes in

$(\partial K^n, \mathcal{T})$ genau einmal enthält. Dies liegt daran, dass jedes $(n-1)$-Simplex in $\mathcal{T}$, das nicht ganz im Rand von K^n liegt, Seite von genau zwei n-Simplizes ist, während jedes $(n-1)$-Simplex in ∂K^n die Seite genau eines n-Simplex ist. Wir werden nun mit der Antipodalitätseigenschaft von f die Aussage

$$f_*(\partial b_n) = 0\,,$$

zum Widerspruch führen.

Zum Beweis dieser Aussage bezeichnen wir mit

$$a_k^+ \in C_k(\partial K^n, \mathcal{T})$$

die Kette, die aus allen k-Simplizes besteht, die in H_k^+ enthalten ist $(k = 0, 1, \dots, n-1)$. Entsprechend definieren wir a_k^-. Die Kette

$$a_k := a_k^+ + a_k^- \in C_k(\partial K^n, \mathcal{T})$$

besteht dann aus allen k-Simplizes in $\partial K^n \cap \mathbb{R}^{k+1}$ bezüglich der Triangulierung $\mathcal{T}$. Insbesondere gilt also

$$\partial b_n = a_{n-1}\,.$$

Weiterhin definieren wir die Ketten

$$c_k^{\pm} := f_*(a_k^{\pm})\,,\ c_k := f_*(a_k)\,.$$

in $C_k(\partial K^n, \mathcal{S})$. Es gilt dann die Gleichung

$$c_{k-1} = \partial c_k^+ = \partial c_k^-$$

für alle $k = 0, \dots, n-1$.

Wir nehmen also an, dass $c_{n-1} = 0$. Dann ist

$$c_{n-1}^+ = c_{n-1}^-$$

(beachte, dass wir immer mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2$ arbeiten) und damit c_{n-1}^+ eine antipodal symmetrische Kette (denn nach Annahme an f sind c_{n-1}^+ und c_{n-1}^- antipodal zueinander). Insbesondere ist also

$$c_{n-2} = \partial c_{n-1}^+ (= \partial c_{n-1}^-)$$

der Rand einer antipodal symmetrischen Kette in $C_{n-1}(\partial K^n, \mathcal{S})$. Letztere (z.B. $= c_{n-1}^+$) können wir in der Form $d_{n-1}^+ + d_{n-1}^-$ schreiben, wobei die $(n-1)$-Kette d_{n-1}^+ antipodal zu d_{n-1}^- ist (indem wir jedes antipodale Paar von Simplizes in c_{n-1}^- auf d_{n-1}^+ und d_{n-1}^- aufteilen). Es gilt also

$$c_{n-2}^+ + c_{n-2}^- = \partial d_{n-1}^+ + \partial d_{n-1}^-$$

oder - nach Umordnen -

$$c_{n-2}^+ + \partial d_{n-1}^+ = c_{n-2}^- + \partial d_{n-1}^-\,.$$

Da die linke Seite antipodal zur rechten ist, ist insbesondere die Kette $c^+_{n-2} + \partial d^+_{n-1}$ antipodal symmetrisch und

$$c_{n-3} = \partial c^+_{n-2} = \partial(c^+_{n-2} + \partial d^+_{n-1})$$

Rand einer antipodal symmetrischen Kette in $C_{n-2}(\partial K^n, \mathcal{S})$. Induktiv können wir schließen, dass c_0 Rand einer antipodal symmetrischen Kette $x \in C_1(\partial K^n, \mathcal{S})$ ist.

Insbesondere besteht c_0 aus einer *geraden* Anzahl von Paaren antipodaler 0-Simplizes. Dies sieht man wie folgt: Es seien σ_1 und σ_2 eindimensionale Simplizes in $(\partial K^n, \mathcal{S})$, die antipodal zueinander sind, also $\tau_*(\sigma_1) = \sigma_2$ ($\tau : \partial K^n \to \partial K^n$ ist die antipodische Abbildung). Wir behaupten, dass die insgesamt vier Ecken von σ_1 und σ_2 paarweise verschieden sind. Es seien v_1, v_1 die Ecken von σ_1 und w_1, w_2 die Ecken von σ_2. Falls $\{v_1, v_2\} = \{w_1, w_2\}$, so gilt $\sigma_1 = \sigma_2$ und die antipodische Abbildung $\tau : \partial K^n \to \partial K^n$ schränkt sich zu einem simplizialen Homöomorphismus $\sigma_1 \to \sigma_1$ ein. Dann hätte aber τ einen Fixpunkt in σ_1, was im Widerspruch dazu steht, dass $\tau : \partial K^n \to \partial K^n$ fixpunktfrei ist. Falls σ_1 und σ_2 eine Ecke gemeinsam haben, argumentieren wir wie folgt: Angenommen $v_1 = w_1$. Da τ keine Fixpunkte hat, müsste dann $\tau(v_2) = w_2$ gelten (sonst wäre $\tau(v_2) = w_1 = v_1$ und τ hätte auf σ_1 wieder einen Fixpunkt). Dann ist aber $\tau(v_1) = w_1 = v_1$ und somit v_1 ein Fixpunkt von τ, Widerspruch.

Jedes Paar antipodaler 1-Simplizes in x liefert also 2 Paare antipodaler 0-Simplizes in c_0 und damit besteht auch c_0 aus einer geraden Anzahl solcher Paare.

Nach Definition besteht aber

$$c_0 = f_*(a_0)$$

genau aus 2 antipodischen Punkten (ebenso wie a_0), d.h. einem einzigen Paar von antipodalen 0-Simplizes. Dies ist ein Widerspruch und damit gilt $c_{n-1} \neq 0$.

Wie wir bereits bemerkt haben, ist der Satz von Borsuk-Ulam nun vollständig bewiesen. Es bleibt noch die allgemeine Form von Tuckers Lemma zu zeigen.

Hätten wir eine Abbildung

$$f : B^n \to \partial K^n$$

wie in Proposition 2.3, so betrachten wir B^n als nördliche Hemisphäre von S^n und erhalten eine stetige Abbildung

$$S^n \to S^{n-1}$$

indem wir x auf $-f(-x)$ abbilden, falls x auf der südlichen Hemisphr̈e liegt. Diese Abbildung ist dann antipodal symmetrisch und es ergibt sich (nach Einbettung von S^{n-1} in $\mathbb{R}^n$) ein Widerspruch zum Satz von Borsuk-Ulam.

3. Kneser-Lovász-Theorem

Eine schöne Anwendung des Satzes von Borsuk-Ulam ist ein Beweis des Kneser-Lovász-Theorems, der von J. Greene im Jahre 2002 angegeben wurde und den wir im folgenden vorstellen wollen. Es geht um die chromatische Zahl des sogenannten *Kneser-Graphen* $K_{n,k}$:

Definition. Es seien k und n natürliche Zahlen, wobei $k \leq n$. Wir definieren einen Graph $K_{n,k}$ wie folgt:

- Die Ecken von $K_{n,k}$ sind die k-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- Je zwei Ecken sind durch eine Kante verbunden, falls die zugehörigen Teilmengen disjunkt sind.

Der Graph $K_{n,1}$ ist z.B. der vollständige Graph mit n Ecken. Der Kneser-Graph $K_{5,2}$ kann mit dem Petersen-Graphen identifiziert werden.

Definition. Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ von G ist die minimale Anzahl von Farben, die man benötigt, um die Ecken von G so zu färben, dass benachbarte Ecken jeweils unterschiedliche Farben haben.

Das folgende Resultat wurde von M. Kneser im Jahre 1955 vermutet und von L. Lovász im Jahre 1978 bewiesen.

Satz 3.1. *Es sei $n \geq 2k - 1$. Dann gilt*

$$\chi(K_{n,k}) = n - 2k + 2\,.$$

Diese Formel kann natürlich nicht stimmen, falls $2 \leq 2k - 2$ ist (dann ist $\chi(K_{n,k}) = 1$). Der Rest dieses Abschnittes ist dem Beweis von Theorem 3.1 gewidmet. Wir nehmen im folgenden immer an, dass $n \geq 2k - 1$ ist.

Der Beweis der Ungleichung

$$\chi(K_{n,k}) \leq n - 2k + 2$$

ist einfach und geht wie folgt. Wir ordnen jeder k-elementigen Teilmenge $F \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ die Zahl

$$\min\{\min(F), n - 2k + 2\}$$

zu. Dies definiert eine Färbung der Ecken mit höchstens $n-2k+2$ „Farben". Falls zwei Teilmengen F, F' die gleiche Farbe i haben, unterscheiden wir zwei Fälle:

- Wenn $i < n-2k+2$, dann ist $i \in F \cap F'$, also sind F und F' nicht disjunkt.
- Wenn $i \geq n-2k+2$, dann sind F und F' Teilmengen von $\{n-2k+2, n-2k+3, \ldots, n\}$. Da letztere Menge nur $2k-1$ Elemente hat, können F und F' nicht disjunkt sein.

Die obige Ungleichung ist damit gezeigt. Die Ungleichung

$$\chi(K_{n,k}) \geq n-2k+2$$

ist viel schwerer zu beweisen. Wir arbeiten mit einer Folgerung aus dem Borsuk-Ulam-Satz, die auch für sich genommen interessant ist.

Proposition 3.2 (Lusternik-Schnirelman). *Es seien $A_1, A_2, \ldots A_{n+1}$ Teilmengen der Sphäre S^n mit den folgenden Eigenschaften:*

- $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = S^n$.
- *Für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ ist A_i entweder offen oder abgeschlossen.*

Dann enthält mindestens eine der Mengen A_i ein Paar antipodaler Punkte, d.h. es gibt ein $x \in S^n$ und ein $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ mit

$$x \in A_i\,, -x \in A_i\,.$$

Proof. Wir nehmen zunächst an, dass alle A_i abgeschlossen sind.

Wir betrachten die stetige Funktion

$$f : S^n \to \mathbb{R}^n\,, x \mapsto (dist(x, A_1), dist(x, A_2), \ldots, dist(x, A_n))\,.$$

Nach dem Satz von Borsuk-Ulam gibt es ein $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Falls eine Koordinate von $f(x)$ gleich 0 ist, dann liegen x und $-x$ in einem A_i mit $1 \leq i \leq n$ (alle A_i sind ja abgeschlossen). Falls aber alle Koordinaten von $f(x)$ ungleich 0 sind, dann liegen x und $-x$ in A_{n+1}, da $A_1, \ldots, A_{n+1}$ ganz S^n überdecken.

Wir nehmen nun an, dass alle A_i offen sind. Wir wählen für jeden Punkt $x \in S^n$ eine abgeschlossene Umgebung $B_x \subset S^n$ von x, die ganz in einem A_i enthalten ist. Da S^n kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1 \ldots, x_l \in S^n$ mit

$$S^n = \bigcup_{i=1}^{l} B_{x_i}\,.$$

Für $i = 1, \ldots, n+1$ sei nun $Y_i \subset A_i$ die Vereinigung derjenigen B_{x_j}, die ganz in A_i enthalten sind. Dann bilden $Y_1, \ldots, Y_{n+1}$ eine abgeschlossene

Überdeckung von S^n. Nach dem bereits Gezeigten enthält also mindestens ein $Y_i \subset A_i$ ein Paar antipodaler Punkte.

Wir nehmen nun an, dass jedes A_i offen oder abgeschlossen ist. Für $\epsilon > 0$ bezeichen wir mit A_i^ϵ die Menge A_i, falls A_i offen ist, und die offene ϵ-Umgebung von A_i, falls A_i abgeschlossen ist. Nach dem eben Gezeigten gibt es für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ein $1 \leq i_k \leq n+1$, so dass $A_{i_k}^{1/k}$ ein Paar antipodaler Punkte enthält. Ist für ein k die Menge A_{i_k} offen (d.h. $A_{i_k} = A_{i_k}^{1/k}$), so sind wir fertig. Andernfalls existiert ein festes $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, so dass A_j abgeschlossen ist und $\pm x_k \in A_j^{\frac{1}{k}}$ für unendlich viele k. Da S^n kompakt ist, enthält (x_k) eine Teilfolge, die gegen einen Punkt $x \in S^n$ konvergiert. Weil $\pm x_k \in A_j^{1/k}$ und weil A_j abgeschlossen in S^n ist, folgt $x, -x \in A_j$. □

Um die verbleibende Abschätzung für die chromatische Zahl des Knesergraphen zu zeigen, nehmen wir nun an, es gäbe $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2k-1$ und

$$\chi(K_{n,k}) \leq n - 2k + 1 \,.$$

Es sei eine entsprechende Färbung von $K_{n,k}$ gewählt. Wir benötigen noch ein Lemma zur Verteilung endlich vieler Punkte in allgemeiner Lage auf der Sphäre:

Lemma 3.3. *Es seien $l, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Dann existieren l paarweise verschiedene Punkte auf der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in* allgemeiner Lage*, das heißt, ist $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperebene (der Kodimension* 1*) durch* 0*, so enthält $S^n \cap H$ höchstens n der gewählten Punkte.*

Proof. Wir betrachten die *Momentenkurve*

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}, \; t \mapsto (t, t^2, t^3, \ldots, t^{n+1}) \,.$$

Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ schneidet $\operatorname{im}(\gamma)$ in höchstens $n+1$ Punkten, denn die Punkte des Schnittortes sind die Nullstellen eines Polynomes vom Grad hëhstens $n+1$ in t. Wenn wir l paarweise verschiedene Punkte auf $\operatorname{im}\gamma$ wählen, die verschieden von $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ sind, dann enthält jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ durch 0 höchstens n dieser Punkte, denn $0 \in \operatorname{im}\gamma$. Wir bringen die so gewählten Punkte auf Norm 1 und erhalten so die gesuchte Teilmenge von S^n. Diese besteht wirklich aus l Punkten, denn auf jedem Strahl durch 0 liegt höchstens einer der l ursprünglich gewählten Punkte. □

Wir wählen nun n Punkte $\{p_1, \ldots, p_n\}$ in allgemeiner Lage auf der Sphäre $S^{n-2k+1} \subset \mathbb{R}^{n-2k+2}$. Die zugrundeliegende Färbung des Knesergraphen induziert eine Färbung der Menge der k-elementigen Teilmengen von $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

Wir definieren eine Überdeckung A_i, $i = 1, \dots, n-2k+2$ von S^{n-2k+1} wie folgt. Für $i = 1, \dots, n-2k+1$ besteht A_i aus den Punkten $x \in S^n$, so dass die offene Hemisphäre von S^n mit Mittelpunkt x einen k-elementige Teilmenge von $\{p_1, \dots, p_n\}$ enthält, die die Farbe i trägt. Des weiteren setzen wir

$$A_{n-2k+2} := S^n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-2k+1} A_i) \subset S^n .$$

Die Mengen $A_1, \dots, A_{n-2k+1}$ sind offen (jedoch nicht unbedingt disjunkt) und die Menge A_{n-2k+2} ist abgeschlossen. Nach Proposition 3.2 enhält mindestens ein A_i ein Paar antipodaler Punkte. Es kann nun aber nicht $1 \leq i \leq n-2k+1$ gelten, denn sonst hätten wir zwei k-elementige Teilmengen von $\{p_1, \dots, p_n\}$ die die gleiche Farbe i tragen und außerdem disjunkt sind (da sie in antipodalen Hemisphären liegen). Also enhält A_{n-2k+2} ein Paar antipodaler Punkte $x, -x$. Die offenen Hemisphären mit Mittelpunkt x und $-x$ enhalten dann jeweils höchstens $k-1$ Punkte. Also liegen auf der Äquatorebene von S^n die zu den Polen $x, -x$ gehört, mindestens $n-2k+2$ Punkte. Dies steht im Widerspruch dazu, dass die Punkte $\{p_1, \dots, p_n\} \in S^{n-2k+1}$ in allgemeiner Lage angeordnet waren. Damit ist der Beweis des Kneser-Lovász-Satzes abgeschlossen.

4. $\mathbb{Z}/2$-Index und Anwendungen

Eine wichtige Einsicht in den Gehalt des Borsuk-Ulam-Satzes ist, dass wir es nicht alleine mit topologischen Räumen und stetigen Abbildungen zu tun haben, sondern mit Räumen, auf denen zusätzlich Gruppen operieren und mit Abbildungen, die diese Operationen respektieren.

Definition. Es sei G eine Gruppe. Ein *G-Raum* ist ein Paar (X, ν), wobei X ein topologischer Raum und ν eine *Operation*, bzw. *Wirkung* von G auf X ist, d.h.

$$\nu : G \to \mathrm{Homeo}(X)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus von G in die Gruppe der Selbsthomöomorphismen von X (insbesondere wird das neutrale Element von G auf die Identität von X abgebildet). Es seien G-Räume (X, ν) und (X', ν') gegeben. Eine stetige Abbildung

$$f : X \to X'$$

heißt *G-äquivariant*, falls f die gegebenen G-Wirkungen respektiert, d.h.

$$\nu'(g) \circ f = f' \circ \nu(g) : X \to X'$$

für alle $g \in G$.

Besonders wichtig für uns sind die zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/n$, $n = \{2, 3, 4, \ldots\}$. Falls X mit mehr Struktur ausgestattet ist (z.B. der einer glatten Mannigfaltigkeit, eines Vektorraumes oder eines Simplizialkomplexes), dann kann man fordern, dass das Bild von ν in denjenigen Selbstabbildungen von X liegt, die die jeweilige Struktur respektieren (d.h. aus glatten, linearen oder simplizialen Selbstabbildungen besteht). Man spricht dann entsprechend von *glatten*, *linearen* oder *simplizialen* G-Operationen.

Beispiel.

- Es sei X ein topologischer Raum. Jede *Involution* auf X, d.h. jede stetige Selbstabbildung $\nu : X \to X$ mit $\nu^2 = \mathrm{id}_X$, induziert auf X eine Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z}/2$. Umgekehrt enspricht jede $\mathbb{Z}/2$-Wirkung auf X genau einer Involution auf X.
- Allgemeiner entsprechen $\mathbb{Z}/n$-Wirkungen auf X Selbstabbildungen $\phi : X \to X$ mit $\phi^n = \mathrm{id}_X$.
- Die lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ operiert in offensichtlicher Weise auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Diese Wirkung ist linear.

Anschaulich gesprochen formalisiert der Begriff des G-Raumes die Idee der Symmetrie einer (mathematischen) Struktur. Das Konzept der Symmetrie ist fundamental für die Mathematik, die moderne Physik und für die (Natur-)Wissenschaft überhaupt.

Definition. Ein G-Raum (X, ν) heißt *frei*, falls für alle $g \in G \setminus \{e\}$ und alle $x \in X$

$$\nu(g)(x) \neq x$$

gilt. Dabei bezeichnet $e \in G$ das neutrale Element. Ein *Fixpunkt* eines G-Raumes (X, ν) ist ein $x \in X$ mit $\nu(g)(x) = x$ für alle $g \in G$, d.h. x wird von allen Gruppenelementen festgehalten.

Wir konzentrieren uns zunächst auf $\mathbb{Z}/2$-Räume.

Definition. Es sei (X, ν) ein $\mathbb{Z}/2$-Raum. Der $\mathbb{Z}/2$-*Index* von X wird definiert als

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(X) := \min\{n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \mid \exists\, X \stackrel{\mathbb{Z}/2}{\to} S^n\},$$

falls die Menge auf der rechten Seite nichtleer ist. Hierbei bedeutet die Angabe von $\mathbb{Z}/2$ über dem Abbildungspfeil, dass wir nur $\mathbb{Z}/2$-äquivariante Abbildungen betrachten, wobei S^n die antipodale $\mathbb{Z}/2$-Wirkung trägt. Ist die recht Menge leer, so setzen wir

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(X) := \infty\,.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2} = \infty$, falls X kein freier $\mathbb{Z}/2$-Raum ist.

Proposition 4.1.
i. *Falls* $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(X) > \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(Y)$, *so existiert keine* $\mathbb{Z}/2$*-Abbildung* $X \to Y$.
ii. *Für* S^n *versehen mit der Standard-*$\mathbb{Z}/2$*-Aktion gilt* $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(S^n) = n$.

Proof. Die erste Aussage ist trivial. Dies gilt auch für die Ungleichung

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(S^n) \leq n\,.$$

Hätten wir andererseits $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(S^n) < n$, dann gäbe es eine $\mathbb{Z}/2$-äquivariante Abbildung $S^n \to S^{n-1}$ und dies fürte nach Komposition mit der Einbettung

$$S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$$

zu einem Widerspruch zum Satz von Borsuk-Ulam. □

Wir wollen das Konzept des $\mathbb{Z}/2$-Index dazu benutzen, gewisse Nichteinbettbarkeitsresultate wie z.B. das folgende zu zeigen.

Satz 4.2 (Van Kampen-Flores)**.** *Es sei* $d \geq 1$ *und es sei* $K := (\Delta^{2d+2})^{\leq d}$ *das* d*-Gerüst des Standard-*$(2d+2)$*-Simplexes. Dann gibt es keine Einbettung (d.h. stetige injektive Abbildung)*

$$|K| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2d}\,.$$

Wir werden sogar stärker zeigen, dass es für jede stetige Abbildung

$$f : |K| \to \mathbb{R}^{2d}$$

zwei disjunkte Seiten $\tau_1, \tau_2 \subset K$ gibt mit

$$f(\tau_1) \cap f(\tau_2) \neq \emptyset\,.$$

Ein bekanntes Einbettbarkeitsresultat besagt, dass jeder d-dimensionale Simplizialkomplex in den $\mathbb{R}^{2d+1}$ eingebettet werden kann. Obiges Theorem zeigt, dass diese Dimensionsschranke im allgemeinen nicht verbessert werden kann. Setzen wir $d = 2$, so folgt ein wichtiger Satz der Graphentheorie.

Korollar 4.3. *Der vollständige Graph* K_5 *mit* 5 *Ecken ist nicht planar.*

Bevor wir den Beweis des Satzes von Van Kampen-Flores beginnen, erinnern wir an den Begriff des *Joins* zweier topologischer Räume X und Y:

$$X \star Y := (X \times Y \times [0,1])/ \sim$$

wobei $(x,y,0) \sim (x',y,0)$ und $(x,y,1) \sim (x,y',1)$ für alle $x,x' \in X$ und $y,y' \in Y$. Anschaulich gesprochen ist dies der Raum aller Strecken, die einen Punkt in Y mit einem Punkt in X verbinden. Sind X und Y G-Räume, so trägt $X \star Y$ eine offensichtliche G-Struktur induziert von der G-Operation auf den Komponenten von $X \times Y \times [0,1]$ (wobei die Operation auf $[0,1]$ trivial ist). Falls X und Y simpliziale Komplexe sind, so trägt $X \star Y$ eine induzierte simpliziale Struktur: Die Simplizes in $X \star Y$ sind genau die Joins von Simplizes in X und Y (wobei eines dieser Simplizes auch leer sein kann). Für abstrakte simpliziale Komplexe (V_1, K_1) und (V_2, K_2) hat man entsprechend: Der Join $(V_1 \star V_2)$ hat als Eckenmenge die disjunkte Vereinigung der Mengen V_1 und V_2 und die Menge der d-Simplizes besteht aus den disjunkten Vereinigungen

$$P_1 \dot\cup P_2 \subset V_1 \dot\cup V_2$$

wobei $P_1 \subset V_1$ ein α-Simplex und $P_2 \subset V_2$ ein β-Simplex ist, mit $-1 \leq \alpha \leq d$ und $\alpha + \beta = d - 1$. Aus dieser Perspektive sieht man auch leicht ein, dass der Join zweir (abstrakter) Simplizes Δ^p und Δ^q mit dem Simplex Δ^{p+q+1} identifiziert werden kann.

Wir bemerken

Lemma 4.4. *Die Abbildung*

$$S^n \star S^m \to S^{n+m+1}\, , [x,y,t] \mapsto \frac{(tx,(1-t)y)}{\|(tx,(1-t)y)\|}$$

ist ein Homöomorphismus. (Wir fassen dabei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ auf). Insbesondere gilt

$$(S^0)^{\star n} = S^n\, .$$

Diese Identifikationen sind alle $\mathbb{Z}/2$-äquivariant. Dies impliziert für zwei $\mathbb{Z}/2$-Räume X und Y die Ungleichung

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(X \star Y) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(X) + \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(Y) + 1\, .$$

Im simplizialen Kontext erhält man auf diese Weise genau die übliche Triangulierung von S^n als Rand von Δ^{n+1}.

Eine Variante der Join-Konstruktion ist die des *reduzierten* Join:

Definition. Es sei K ein simplizialer Komplex. Wir definieren den *reduzierten Join*

$$K^{\star 2}_{\Delta} \subset K \star K\, ,$$

als die Vereinigung der Simplizes $\tau_1 \star \tau_2$, wobei τ_1 und τ_2 (möglicherweise leere) Seiten von K sind mit $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$.

Da wir auf $\mathbb{R}^n$ keine simpliziale Struktur vorgeben wollen, definieren wir noch den (topologischen) reduzierten Join

$$(\mathbb{R}^n)^{\star 2}_{\Delta} := \{(x, y, t) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 1])/\sim \ \mid t = \frac{1}{2} \Rightarrow x \neq y\}\,.$$

Die Abbildung

$$(x, y, t) \mapsto (y, x, 1 - t)$$

induziert $\mathbb{Z}/2$-Aktionen auf $K^{\star 2}_{\Delta}$ und $(\mathbb{R}^n)^{\star 2}_{\Delta}$. Man überprüft leicht, dass diese Operationen frei sind.

Um den Van Kampen-Flores Satz zu zeigen, machen wir folgende Überlegung: Es sei K ein simplizialer Komplex und wir nehmen an, es gäbe eine Abbildung

$$f : |K| \to \mathbb{R}^n$$

so dass für je zwei disjunkte Seiten τ_1, τ_2 von K gilt

$$f(\tau_1) \cap f(\tau_2) = \emptyset\,.$$

Wir erhalten daraus eine Abbildung

$$f \star f : K \star K \to \mathbb{R}^d \star \mathbb{R}^d\,.$$

Entscheidend sind nun die folgenden zwei Beobachtungen

- Diese Abbildung schränkt sich zu einer Abbildung $K^{\star 2}_{\Delta} \to (\mathbb{R}^n)^{\star 2}_{\Delta}$ ein.
- Die so erhaltene Abbildung ist $\mathbb{Z}/2$-äquivariant.

Der Satz von Van Kampen-Flores folgt somit zusammen mit Proposition 4.1 aus:

Proposition 4.5. i. $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}((\mathbb{R}^{2d})^{\star 2}_{\Delta}) \leq 2d$.
ii. *Für* $K := (\Delta^{2d+2})^{\leq d}$ *gilt* $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(K^{\star 2}_{\Delta}) > 2d$.

Wir haben also den Satz gezeigt, indem wir einen äquivarianten *Konfigurationsraum* ($= K^{\star 2}_{\Delta}$) konstruiert haben, der die erlaubten geometrischen Konstellationen kodiert, zusammen mit einer *Testabbildung* auf diesem Konfigurationsraum, die es erlaubt, eine interessante äquivariante Invariante dieses Raumes abzuschätzen.

Den ersten Teil der Proposition zeigen wir durch Konstruktion einer $\mathbb{Z}/2$-äquivarianten Abbildung

$$(\mathbb{R}^k)^{\star 2}_{\Delta} \to S^k$$

für alle k (wobei die Sphäre natürlich wieder die antipodale $\mathbb{Z}/2$-Wirkung trägt). Dazu setzen wir zunächst für $[x,y,t] \in \mathbb{R}^k \star \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} \lambda_1([x,y,t]) &:= (t, tx) \in \mathbb{R}^{k+1}, \\ \lambda_2([x,y,t]) &:= (1-t, (1-t)y) \in \mathbb{R}^{k+1}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass diese Abbildungen wohldefiniert (d.h. mit der Äquivalenzrelation auf dem Join verträglich) sind. Gilt nun $[x,y,t] \in (\mathbb{R}^k)^{\star 2}_{\Delta}$, so haben wir

$$\lambda_1([x,y,t]) - \lambda_2([x,y,t]) \neq 0 \in \mathbb{R}^{k+1}$$

und nach Normierung auf Einheitslänge erhalten wir die gewünschte Abbildung nach S^k. Diese ist offensichtlich $\mathbb{Z}/2$-äquivariant.

Um den zweiten Teil der Proposition zu zeigen, müssen wir eine Methode finden, $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}/2}(K^{\star 2}_{\Delta})$ nach unten abzuschätzen.

Wir beginnen mit einer allgemeinen Überlegung. Es sei P ein Simplizialkomplex und P' eine Teilmenge der (abstrakten) Simplizes von P, aber nicht notwendigerweise ein simplizialer Unterkomplex. Die Menge der Simplizes in P' ist partiell geordnet. Wir definieren nun $\Delta(P')$ als die geometrische Realisierung des *Ordnungskomplexes* von P', d.h. die Ecken von $\Delta(P')$ sind die *nichtleeren* Simplizes in P' und $\{\tau_0, \ldots, \tau_l\}$ bildet ein l-Simplex in $\Delta(P')$, falls τ_i, $0 \le i \le l$ paarweise verschiedene, nichtleere Simplizes in P' sind, die (nach eventueller Umordnung)

$$\tau_0 \subset \tau_1 \subset \ldots \subset \tau_l$$

erfüllen. Man beachte, dass $\Delta(P)$ nichts anderes als die baryzentrische Unterteilung von P und allgemeiner $\Delta(P')$ ein Unterkomplex der baryzentrischen Unterteilung von P ist. Es sei nun

$$P = P_0 \dot\cup P_1$$

eine Partition der Simplizes von P in zwei disjunkte Teilmengen. Dann erhalten wir (auf dem Niveau der abstrakten Simplizialkomplexe) eine kanonische Abbildung

$$\phi : \Delta(P) \to \Delta(P_1) \star \Delta(P_2)$$

indem wir jedes Simplex $\sigma = \{\tau_0, \ldots, \tau_l\} \in \Delta(P)$ in die Simplizes $\sigma \cap P_1$ und $\sigma \cap P_2$ aufteilen.

Ist P mit einer simplizialen G-Wirkung versehen, unter der P' invariant ist (d.h. die Operation auf P bildet Simplizes in P' wieder auf Simplizes in P' ab), so trägt $\Delta(P')$ eine induzierte G-Wirkung. Und ist $P = P_1 \cup P_2$ eine Partition wie eben und P_1 invariant unter der G-Wirkung, so ist auch P_2 G-invariant und ϕ ist bezüglich der offensichtlichen G-Wirkungen äquivariant.

Satz 4.6 (Sarkaria's Ungleichung)**.** *Es sei P ein Simplizialkomplex versehen mit einer simplizialen $\mathbb{Z}/2$-Wirkung und $Q \subset P$ ein $\mathbb{Z}/2$-invarianter Unterkomplex. Dann gilt*

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(Q) \geq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(P) - \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(\Delta(P \setminus Q)) - 1\,.$$

Dabei bezeichnet $P \setminus Q$ die Menge der Simplizes in P, die nicht in Q enthalten sind.

Proof. Nach der vorherigen Bemerkung gilt

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(\Delta(P)) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(\Delta(Q) \star \Delta(P \setminus Q))\,.$$

und nach Lemma 4.4 ist

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(\Delta(Q) \star \Delta(P \setminus Q)) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(\Delta(Q)) + \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(\Delta(P \setminus Q)) + 1\,.$$

Daraus folgt die behauptete Ungleichung. □

Wir wenden nun diese Ungleichung auf die Komplexe $P := (\Delta^{2d+2})^{\star 2}_{\Delta}$ und $Q := ((\Delta^{2d+1})^{\leq d})^{\star 2}_{\Delta}$ an, wobei P mit der üblichen $\mathbb{Z}/2$-Wirkung auf dem reduzierten Join ausgestattet ist (d.h. die Faktoren werden vertauscht). Die Menge der Simplizes in $P \setminus Q$ besteht aus Joins

$$\tau_1 \star \tau_2$$

wobei $\tau_1, \tau_2 \subset \{0, 1, \ldots, 2d + 2\}$ abstrakte Simplizes in Δ^{2d+2} sind mit $\tau_1 \cap \tau_2 = \emptyset$ (damit der entsprechende Simplex im reduzierten Join liegt) und $|\tau_1| > d+1$ oder $|\tau_2| > d+1$ (damit der entsprechende Simplex nicht in Q liegt). Da zwei disjunkte Teilmengen von $\{0, 1, \ldots, 2d + 2\}$ nicht beide mehr als $d + 1$ Elemente haben können, zerfällt die Menge der Simplizes in $P \setminus Q$ also in die disjunkten Teilmengen $T_1 := \{\tau_1 \star \tau_2 \mid |\tau_1| > d + 1\}$ und $T_2 := \{\tau_1 \star \tau_2 \mid |\tau_2| > d + 1\}$. Da niemals ein Simplex in T_1 in einem Simplex aus T_2 enthalten sein kann und umgekehrt, besteht $\Delta(P \setminus Q)$ aus (mindestens) zwei Komponenten, die durch die $\mathbb{Z}/2$-Wirkung vertauscht werden. Damit gilt

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(\Delta(P \setminus Q)) = 0$$

und mit Sarkaria's Ungleichung gilt die Abschätzung

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(Q) \geq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(P) - \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(Q) - 1 = \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(P) - 1\,.$$

Der Van Kampen-Flores Satz folgt also aus

Lemma 4.7. *Für alle $n \geq 1$ ist*

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}((\Delta^n)^{\star 2}_{\Delta}) = n\,.$$

Proof. Es seien zunächst K und L beliebige (abstrakte) Simplizialkomplexe. Dann sieht man durch direkten Vergleich der auf beiden Seiten enthaltenen Simplizes (hier zeigt sich die Nützlichkeit des reduzierten Join), dass

$$(K \star L)^{\star 2}_{\Delta} = K^{\star 2}_{\Delta} \star L^{\star 2}_{\Delta} .$$

Damit erhalten wir

$$(\Delta^n)^{\star 2}_{\Delta} = ((\Delta^0)^{\star(n+1)})^{\star 2}_{\Delta} = ((\Delta^0)^{\star 2}_{\Delta})^{\star(n+1)} = (S^0)^{\star(n+1)} = S^n .$$

Man prüft leicht nach, dass diese Identifikation $\mathbb{Z}/2$-äquivariant ist. Damit folgt die Behauptung. □

Eine weitere schöne Anwendung unserer Methoden ist

Proposition 4.8. *Der vollständige Bipartite Graph $K_{3,3}$ ist nicht planar.*

Proof. Wir können $K := K_{3,3}$ als Join $D_3 \star D_3$ schreiben, wobei D_3 der diskrete Raum mit drei Punkten ist. Nach dem Beweis des vorherigen Lemmas ist also

$$K^{\star 2}_{\Delta} = ((D_3)^{\star 2}_{\Delta})^{\star 2} .$$

Nun ist aber $(D_3)^{\star 2}_{\Delta}$ $\mathbb{Z}/2$-homöomorph zu S^1 (wie man direkt sieht) und damit $K^{\star 2}_{\Delta}$ $\mathbb{Z}/2$-homöomorph zu S^3. Insbesondere gilt $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/2}(K^{\star 2}_{\Delta}) = 3 > 2$ und damit hat jede stetige Abbildung $K \to \mathbb{R}^2$ die Eigenschaft, dass sich die Bilder zweier disjunkter Seiten in K schneiden. □

5. Tverberg-Partitionen

Wir wollen die Methode des äquivarianten Index dazu benutzen, einen anderen Kreis von interessanten Resultaten zu diskutieren. Als Ausgangspunkt wählen wir folgenden Satz.

Satz 5.1 (Radon)**.** *Jede Menge von $d+2$ Punkten im $\mathbb{R}^d$ lässt sich so in zwei disjunkte Teilmengen zerlegen, dass sich die konvexen Hüllen dieser Mengen schneiden.*

Proof. Wir bezeichnen die Punkte mir $x_1, \ldots, x_{d+2}$. Diese sind affin abhängig, erfüllen also eine Gleichung

$$\alpha_a x_1 + \ldots + \alpha_{d+2} x_{d+2} = 0 ,$$

wobei α_i reelle Zahlen sind, die nicht alle gleich 0 sind, mit $\sum \alpha_i = 0$. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} I_1 &:= \{i \mid \alpha_i > 0\} , \\ I_2 &:= \{i \mid \alpha_i < 0\} . \end{aligned}$$

Mit $S := \sum_{i\in I_1} \alpha_i = \sum_{i\in I_2} -\alpha_i$ ist dann der Punkt

$$\frac{1}{S}\sum_{i\in i_1} \alpha_i x_i = \frac{1}{S}\sum_{i\in I_2} (-\alpha_i) x_i$$

eine Konvexkombination sowohl der mit $i \in I_1$ indizierten als auch der mit $i \in I_2$ indizierten Punkte x_i. $\square$

Dieses Resultat lässt sich auch anders formulieren: Es sei

$$f : \Delta^{d+1} \to \mathbb{R}^d$$

eine affine Abbildung. Dann gibt es zwei disjunkte Seiten von Δ^{d+1} (diese können jeweils höchstens Dimension d haben), deren Bilder sich schneiden. Daher kann das folgende Resultat als eine topologische Version von Radons Satz aufgefasst werden:

Satz 5.2. *Die eben formulierte Aussage gilt auch dann noch, wenn f lediglich als stetig vorausgesetzt wird.*

Proof. Wir nehmen an, es gibt ein f, dass der gemachten Aussage widerspricht, setzen $K := \Delta^{d+1}$ und konstruieren aus f eine $\mathbb{Z}/2$-äquivariante Testabbildung

$$K^{\star 2}_{\Delta} \to (\mathbb{R}^d)^{\star 2}_{\Delta}$$

wie im voherigen Abschnitt. Nach Lemma 4.7 ist der $\mathbb{Z}/2$-Index des Definitionsbereiches gleich $d+1$. Da der $\mathbb{Z}/2$-index des Zieles aber höchstens gleich d ist, wie wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, erhält man einen Widerspruch. $\square$

Die folgende Verallgemeinerung des Radon-Satzes wurde von H. Tverberg im Jahre 1966 angegeben.

Satz 5.3 (Tverberg's Theorem)**.** *Es seien $d \geq 1$ und $r \geq 2$ natürliche Zahlen. Dann kann jede Menge von $(d+1)(r-1)+1$ Punkten im $\mathbb{R}^d$ so in r disjunkte Teilmengen aufgeteilt werden, so dass der Schnitt der konvexen Hüllen all dieser Teilmengen nichtleer ist.*

Man kann zeigen, dass die Anzahl $(d+1)(r-1)+1$ in diesem Satz nicht (nach unten) verbessert werden kann. Eine Partition, wie sie im letzten Satz beschrieben wurde, nennt man *Tverbergpartition.*

Auch dieser Satz hat eine topologische Entsprechung.

Satz 5.4. *Es sei $d \geq 1$ und es sei $r = p^q$, $q \geq 1$, eine Primzahlpotenz. Wir setzen $N := (d+1)(r-1)$. Es sei*

$$f : \Delta^N \to \mathbb{R}^d$$

eine stetige Abbildung. Dann gibt es r disjunkte Seiten $\tau_1, \ldots, \tau_r \subset \Delta^N$, so dass

$$f(\tau_1) \cap \ldots \cap f(\tau_r) \neq \emptyset \, .$$

Es ist leicht zu sehen, dass daraus Tverbergs Theorem (für $r = p^q$) folgt. Ob die topologische Version für beliebige natürliche Zahlen $r \geq 2$ richtig bleibt, ist ein zentrale offene Frage. Andererseits zeigt der Satz von Tverberg, dass Theorem 5.4 für alle $r \geq 2$ richtig ist, falls f affin ist. Hier zeigt sich also eine Grenze der topologischen Methode (wie sie bis heute entwickelt wurde) zur Behandlung kombinatorischer, bzw. affin-geometrischer Fragen.

Wir werden hier nur die topologische Version des Tverberg-Satzes für den Fall r prim diskutieren. Um das Konzept des $\mathbb{Z}/2$-Index zu verallgemeinern, brauchen wir zunächst die passende Entsprechung der Sphären mit der antipodalen $\mathbb{Z}/2$-Wirkung.

Lemma 5.5. *Es sei G eine endliche Gruppe und X ein Simplizialkomplex zusammen mit einer freien simplizialen G-Wirkung. Ist $g \in G$ nicht das neutrale Element und $\sigma \subset X$ ein Simplex, so gilt $g(\sigma) \neq \sigma$.*

Proof. Angenommen $g(\sigma) = \sigma$. Dann fixiert g den Mittelpunkt von σ, Widerspruch. □

Definition. Es sei G eine endliche Gruppe. Ein n-dimensionaler, $(n-1)$ zusammenhängender, freier G-Simplizialkomplex X heißt *E_nG-Raum.*

Dabei heißt ein topologischer Raum X *k-zusammenhängend*, wenn jede stetige Abbildung

$$S^i \to X$$

für $0 \leq i \leq k$ nullhomotop ist.

Man beachte, dass G mit der Linkstranslationswirkung selbst ein freier G-Raum ist. Daher ist auch $G^{\star(n+1)}$, der $(n+1)$-fache Join der (diskreten) Menge G mit der komponentenweisen G-Wirkung ein freier G-Raum. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $G^{\star(n+1)}$ homotopieäquivalent zu einer Einpunktvereinigung von n-Sphären und damit ein $(n-1)$-zusammenhängender, n-dimensionaler freier G-Simplizialkomplex ist. Daher ist $G^{\star(n+1)}$ ein Beispiel eines E_nG-Raumes. Diese Konstruktion geht auf J. Milnor zurück.

Wir formulieren eine wichtige Eigenschaft der E_nG-Räume:

Lemma 5.6. *Es seien X und Y zwei E_nG-Räume. Dann gibt es eine G-äquivariante Abbildung $X \to Y$.*

Proof. Nach Lemma 5.5 induziert G für alle $k \in \mathbb{N}$ eine freie Wirkung auf der Menge der k-Simplizes von X. Für alle k wählen wir aus der Menge der G-Orbits dieser Wirkung ein Repräsentantensystem $\sigma_{k,1}, \ldots, \sigma_{k,j_k}$ von k-Simplizes (d.h. jeder G-Orbit von k-Simplizes enthält genau ein $\sigma_{k,i}$).

Eine G-äquivariante Abbildung $f : X \to Y$ erhält man nun wie folgt: Wir wählen $f(\sigma_{0,1}), \ldots, f(\sigma_{0,j_0}) \in Y$ beliebig und setzen diese Abbildung äquivariant auf das 0-Gerüst von X fort (dies ist immer möglich, da G frei auf X wirkt).

Falls $1 \leq k \leq n$ und f auf dem $(k-1)$-Gerüst von X schon konstruiert wurde, können wir f auf die Simplizes $\sigma_{k,1}, \ldots, \sigma_{1,k_1}$ fortsetzen, da Y $(k-1)$-zusammenhängend ist. Diese Abbildung setzen wir nun äquivariant auf das k-Gerüst von X fort (dies benutzt Lemma 5.5). Da X n-dimensional und Y $(n-1)$-zusammenhängend ist, erhält man auf diese Weise induktiv die gewünschte G-äquivariante Abbildung $X \to Y$. $\square$

Wenn es um die Existenz G-äquivarianter Abbildungen in einen E_nG-Raum X geht, spielt es also keine Rolle, welchen E_nG-Raum X man genau wählt. Wir sprechen in diesem Zusammenhang dann einfach von „dem" Raum E_nG.

Definition. Es sei G eine endliche Gruppe und X ein G-Raum. Wir setzen

$$\operatorname{ind}_G(X) := \min\{n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \mid \exists\, X \xrightarrow{G} E_nG\},$$

falls die Menge auf der rechten Seite nichtleer ist (dies impliziert, dass X ein freier G-Raum ist). Ansonsten setzen wir $\operatorname{ind}_G(X) := \infty$.

Der folgende Satz kann als Verallgemeinerung des Satzes von Borsuk-Ulam aufgefasst werden.

Satz 5.7 (Dold)**.** *Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und G eine endliche Gruppe (mit mindestens 2 Elementen). Dann gibt es keine G-äquivariant Abbildung $E_nG \to E_{n-1}G$. Insbesondere ist*

$$\operatorname{ind}_G E_nG = n\,.$$

Am Ende dieser Vorlesung skizzieren wir einen Beweis mit Hilfe der Lefschetz-Zahl.

Mit diesen Werkzeugen kann der topologische Tverbergsatz analog zum topologischen Radon-Satz diskutiert werden. Wir weisen auf die erforderlichen Modifikationen bei der Konstruktion der Konfiguarionsräume hin.

Es sei K ein endlicher Simplizialkomplex und r eine natürliche Zahl. Wir betrachten den 2*-fach reduzierten* r*-fachen Join*

$$K^{\star r}_{\Delta(2)} := \{\tau_1 \star \tau_2 \star \ldots \star \tau_r \in K^{\star r} \mid \forall i \neq j : \tau_i \cap \tau_j = \emptyset\} .$$

Dabei bezeichnen die τ_i Seiten von K.

Die zylische Permutation der Joinkomponenten induziert eine freie $\mathbb{Z}/r$-Operationen auf $K^{\star r}_{\Delta(2)}$. (Dies gilt auch dann, wenn r nicht prim ist).

Wir nehmen nun an, der topologische Tverberg-Satz sei falsch. Es sei

$$f : \Delta^N \to \mathbb{R}^d$$

ein Gegenbeispiel. Wir erhalten eine Abbildung

$$\begin{aligned} F : (\Delta^N)^{\star r}_{\Delta(2)} &\to (\mathbb{R}^{d+1})^r \\ [(x_1, t_1), \ldots, (x_r, t_r)] &\mapsto (t_1 \cdot (f(x_1), 1), \ldots, t_r \cdot (f(x_r), 1)) . \end{aligned}$$

Diese ist $\mathbb{Z}/r$-äquivariant, wenn wir auf dem Zielbereich die $\mathbb{Z}/r$-Operation betrachten, die die Komponenten von $(y_1, \ldots, y_r) \in (\mathbb{R}^{d+1})^r$ zyklisch permutiert. Es sei

$$\Delta := \{(y_1, \ldots, y_r) \in (\mathbb{R}^{d+1})^r \mid y_1 = \ldots = y_r\}$$

Da r eine Primzahl ist, operiert $\mathbb{Z}/r$ frei auf $(\mathbb{R}^{d+1})^r \setminus \Delta$ und Komposition mit der Projektion auf das orthogonale Komplement $V \subset (\mathbb{R}^{d+1})^r$ von $\Delta \subset (\mathbb{R}^{d+1})^r$ liefert nach Voraussetzung an f eine $\mathbb{Z}/r$-äquivariante Abbildung

$$(\Delta^N)^{\star r} \to (\mathbb{R}^{d+1})^r \setminus \Delta \to V \setminus \{0\}$$

der Unterraum V hat Dimension $N := (d+1)(r-1)$ und durch Projektion auf die Einheitssphäre erhalten wir schließlich eine $\mathbb{Z}/r$-äquivariante Abbildung

$$(\Delta^N)^{\star r}_{\Delta(2)} \to S^{N-1}$$

wobei $\mathbb{Z}/r$ auf Quelle und Ziel frei operiert. Dies widerspricht aber der folgenden Proposition.

Proposition 5.8.

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}/r} (\Delta^N)^{\star r}_{\Delta(2)} = N .$$

Proof. Dies folgt aus der Gleichung von freien $\mathbb{Z}/r$-Räumen

$$(\Delta^N)^{\star r}_{\Delta(2)} = ((\Delta^0)^{\star(N+1)})^{\star r}_{\Delta(2)} = ((\Delta^0)^{\star r}_{\Delta(2)})^{\star(N+1)}) = (\mathbb{Z}/r)^{\star(N+1)} = E_N \mathbb{Z}/r$$

und dem Satz von Dold. □

6. Singuläre Homologie

Wir knüpfen an das erste Kapitel an und wollen in den folgenden Abschnitten die singuläre Homologietheorie entwickeln, ein sehr mächtiges Werkzeug der algebraischen Topologie.

Es ist etwas unhandlich, dies direkt mit den geometrischen Simplizialkomplexen zu machen (wir werden allerdings später auf diesen Spezialfall zurückkommen). Der folgende Aufbau bietet mehr Flexibilität.

Definition. Es sei X ein topologischer Raum. Dann ist ein *singuläres n-Simplex* in X eine stetige Abbildung

$$\sigma : \Delta^n \to X$$

vom Standard-n-Simplex in $\mathbb{R}^n$ (mit der Teilraumtopologie) nach X. Wir bezeichnen mit $\Delta_n(X)$ die Menge der singulären n-Simplizes in X und mit $C_n(X)$ die freie abelsche Gruppe über $\Delta_n(X)$, d.h. Elemente von $C_n(X)$ sind formale Linearkombinationen

$$\sum_{\sigma \in \Delta_n(X)} \lambda_\sigma \cdot \sigma \,,$$

wobei alle $\lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_\sigma = 0$ für alle bis auf endlich viele $\sigma \in \Delta_n(X)$. Die Elemente von $C_n(X)$ werden *singuläre n-Ketten* in X genannt.

Wir definieren für $n \geq 1$ den *Randoperator*

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

auf den singulären n-Simplizes von X durch

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{\langle e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_n \rangle} \,.$$

Dabei bezeichnet $\langle e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_n \rangle$ die i-te *Seite* von Δ^n. Diese identifizieren wir mit Δ^{n-1} vermittels des affinen Homöomorphismus

$$\Delta^{n-1} \to \langle e_0, \ldots, \hat{e_i}, \ldots, e_n \rangle$$

der die j-te Ecke von Δ^{n-1} auf $e_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ abbildet, falls $j < i$ und auf e_{j+1}, falls $j \geq i$. Damit ist $\partial\sigma$ in der Tat eine singuläre $(n-1)$-Kette in X. Zur Bequemlichkeit setzen wir noch $\partial_0 := 0$. Wir erhalten für $n \geq 0$

$$Z_n(X) := \ker \partial_n \subset C_n(X) \,,$$

die Gruppe der *singulären n-Zykel* in X und

$$B_n(X) := \operatorname{im} \partial_{n+1} \subset C_n(X) \,,$$

die Gruppe der *singulären n-Ränder* in X.

Ganz analog zu früher zeigt man die fundamentale Gleichung

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$$

für $n \geq 1$. Wir erhalten somit den *singuläre Kettenkomplex* $(C_*(X), \partial_*)$.

Insbesondere ist $B_n(X)$ eine Untergruppe von $Z_n(X)$ für alle $n \geq 0$ und wir können

$$H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X)$$

definieren. Dies ist die n-te *singuläre Homologiegruppe* von X.

Es wird sich zeigen, dass sie sich relativ einfach berechnen lassen und andererseits wichtige Eigenschaften des topologischen Raumes X widerspiegeln.

Wir bemerken, dass die singulären Homologiegruppen funktoriell in X sind. Sei dazu $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ist $\sigma : \Delta^n \to X$ ein singuläres n-Simplex in X, so ist $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ ein singuläres n-Simplex in Y. Damit erhalten wir Abbildungen von abelschen Gruppen

$$f_n : C_n(X) \to C_n(Y)\,.$$

Diese sind mit den Randoperatoren ∂_n verträglich, bilden also eine Kettenabildung $C_*(X) \to C_*(Y)$ und wir erhalten induzierte Abbildungen

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

für alle $n \geq 0$. Da offensichtlich $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{H_n(X)}$ für alle n und $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ für $g : X \to Y$ und $f : Y \to Z$, definieren die Homologiegruppen H_n also Funktoren Top $\to$ AbGr von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen. Als unmittelbare Folgerung notieren wir:

Proposition 6.1. *Homöomorphe Räume haben isomorphe singuläre Homologiegruppen.*

Zur Erinnerung: Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie (abelscher) Gruppen, so ist die *direkte Summe* $\bigoplus_{i\in I} A_i$ die Menge der Familien $(a_i)_{i\in I}$, $a_i \in A_i$, wobei alle bis auf endlich viele a_i gleich 0 sind, versehen mit der komponentenweisen Verknüpfung.

Proposition 6.2. *Es sei X ein topologischer Raum und $\pi_0(X)$ die Menge der Wegekomponenten von X. Dann induzieren die Inklusionen $C \hookrightarrow X$ (für alle $C \in \pi_0(X)$) einen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{C\in\pi_0(X)} H_*(C) \cong H_*(X)\,.$$

Dies liegt daran, das jede singuläre Kette in X kanonisch als Summe singulärer Ketten in den einzelnen Wegekomponenten geschrieben werden kann (jedes singuläre Simplex liegt ja ganz in einer Wegekomponente).

Zusammen mit der folgenden Proposition können wir H_0 für jeden topologischen Raum berechnen.

Proposition 6.3. *Es sei X ein wegzusammenhängender nichtleerer topologischer Raum. Dann ist*

$$H_0(X) \cong \mathbb{Z}$$

und wir können als Erzeuger die Klasse eines beliebigen 0-Simplex $\Delta^0 \to X$ wählen.

Proof. Wir können jedes singuläre 0-Simplex in X einfach als Punkt in X auffassen. Da $\partial_0 = 0$ ist also

$$Z_0(X) = \{\sum_{x \in X} \lambda_x \cdot x \mid \lambda_x \in \mathbb{Z}\}$$

wobei fast alle $\lambda_x = 0$. Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$\epsilon : Z_0(X) = C_0(X) \to \mathbb{Z}\,, \ \sum \lambda_x \cdot x \mapsto \sum \lambda_x \in \mathbb{Z}\,.$$

Wir behaupten, dass ϵ eine Abbildung

$$\epsilon : H_0(X) = Z_0(X)/B_0(X) \to \mathbb{Z}$$

induziert, d.h. dass $\epsilon|_{B_0(X)} = 0$. Sei dazu $\sigma : [0,1] \to X$ ein singuläres 1-Simplex. Dann ist $\epsilon(\partial\sigma) = \epsilon(\sigma(1) - \sigma(0)) = 1 - 1 = 0$, wie gewünscht.

Zu zeigen bleibt, dass $\epsilon : H_0(X) \to \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist. Da $X \neq \emptyset$, ist ϵ surjektiv. Für die Injektivität sei $x_0 \in X$ beliebig und für alle $x \in X$ sei $w_x : [0,1] \to X$ ein Weg von x_0 nach x, den wir als singuläres 1-Simplex in X auffassen. Es sei nun

$$c = \sum \lambda_x \cdot x \in Z_0(X)$$

mit $\epsilon(c) = \sum \lambda_x = 0$. Wir müssen zeigen, dass c ein Rand ist. Aber

$$c - \partial(\sum \lambda_x \cdot w_x)$$

ist homolog zu c (d.h. die Differenz zu c ist ein Rand) und

$$c - \partial(\sum \lambda_x w_x) = \sum \lambda_x \cdot x_0 = (\sum \lambda_x) \cdot x_0 = 0$$

wegen $\epsilon(c) = 0$. □

Wir beweisen nun:

Satz 6.4. *Es seien $f, g : X \to Y$ homotope Abbildungen. Dann gilt*

$$f_* = g_* : H_*(X) \to H_*(Y)\,.$$

Korollar 6.5. *Homotopieäquivalente Räume haben isomorphe Homologiegruppen.*

Als Vorbereitung führen wir ein neues Konzept ein.

Definition. Es seien $\phi_*, \psi_* : C_* \to D_*$ Kettenabbildungen. Eine *Kettenhomotopie* von ϕ_* nach ψ_* ist eine Folge von Homomorphismen $P_n : C_n \to D_{n+1}$ mit

$$\partial P + P\partial = \phi_* - \psi_*\,.$$

Existiert so eine Kettenhomotopie, so nennen wir ϕ_* und ψ_* *kettenhomotop.*

Man überprüft leicht:

Proposition 6.6. *Kettenhomotope Kettenabbildungen induzieren die gleichen Abbildungen zwischen Homologiegruppen.*

Beweis von Satz 6.4. Es sei

$$H : X \times [0,1] \to Y$$

eine Homotopie von f nach g. Es seien $\langle v_0, \ldots, v_n\rangle$ und $\langle w_0, \ldots, w_n\rangle$ die Ober-, bzw. Unterseite des Produktes $\Delta^n \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}$ mit ihrer kanonischen Struktur als geordnete affine Simplizes (d.h. $v_i = (e_i, 0)$ und $w_i = (e_i, 1)$). Für $n \geq 0$ definieren wir nun den *Prisma-Operator* $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ durch

$$P(\sigma) := \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i (H \circ (\sigma \times \mathrm{id}))|_{\langle v_0, \ldots, v_i, w_i, \ldots, w_n\rangle} \in C_{n+1}(Y)$$

für jedes singuläre n-Simplex $\sigma : \Delta^n \to X$. Man zeigt nun mit einer expliziten Rechnung (siehe Hatcher, S. 112), dass (als Abbildungen $C_n(X) \to C_n(Y)$)

$$\partial \circ P = g_* - f_* - P \circ \partial$$

mit anderen Worten, $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$, $n \geq 0$, ist eine Kettenhomotopie zwischen den Abbildungen $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$ und $g_* : C_*(X) \to C_*(Y)$. Daraus folgt mit der vorherigen Proposition die Behauptung. □

Es sei nun X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge (versehen mit der Unterraumtopologie). Wir sprechen in dieser Situation auch von einem *Raumpaar*. Dabei kann auch $A = \emptyset$ sein. Die Inklusion $i : A \hookrightarrow X$ induziert einen Kettenabbildung $i : C_*(A) \to C_*(X)$, die in jedem Grad injektiv ist. Insofern können wir $C_*(A)$ als Unterkomplex von $C_*(X)$ in folgendem Sinne auffassen.

Definition. Es sei (C_*, ∂) ein Kettenkomplex. Ein *Unterkomplex* von C_* ist eine Folge $(D_n)_{n\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $D_n \subset C_n$ ist eine Untergruppe ,
- $\partial(D_n) \subset D_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.

Insbesondere ist dann D_* mit dem von C_* induzierten Randoperator selbst ein Kettenkomplex.

Ist C_* ein Kettenkomplex und $D_* \subset C_*$ ein Unterkomplex, so können wir den *Quotientenkomplex* C_*/D_* definieren, indem wir

$$(C_*/D_*)_n := C_n/D_n$$

setzen und beachten, dass der Randoperator ∂ von C_* Abbildungen

$$\partial_n^{C/D} : C_n/D_n \to C_{n-1}/D_{n-1}$$

induziert. Diese erfüllen offensichtlich $\partial_{n-1}^{C/D} \circ \partial_n^{C/D} = 0$ für alle $n \geq 1$ (wir setzen wie üblich wieder $\partial_0^{C/D} = 0$).

Definition. Es sei (X, A) ein Raumpaar. Der *relative singuläre Kettenkomplex* $(C_*(X, A), \partial)$ ist definiert als der Quotientenkomplex $C_*(X)/C_*(A)$. Die Homologiegruppen dieses Komplexes sind die *relativen singulären Homologiegruppen* von (X, A) und werden mit $H_n(X, A)$ bezeichnet.

Ist $A = \emptyset$ können wir $H_n(X, A)$ und $H_n(X)$ kanonisch identifizieren. Homologieklassen in $H_n(X, A)$ werden durch singuläre Ketten in X repräsentiert, deren Rand ganz in A liegt und zwei solche Ketten sind homolog in (X, A), wenn man nach Addition einer geeigneten Kette in A zu ihrer Differenz einen Rand in X erhält.

Wir können die Kategorie $Top(2)$ betrachten, deren Objekte die Paare topologischer Räume und deren Morphismen $(X, A) \to (Y, B)$ stetige Abbildungen $f : X \to Y$ mit $f(A) \subset B$ sind (diese Eigenschaft bleibt bei Komposition zweier Abbildungen erhalten). Die relativen Homologiegruppen definieren für $n \geq 0$ Funktoren

$$H_n : Top(2) \to AbGr\,,$$

wie man direkt aus der Definition folgern kann. Darüberhinaus erhalten wir folgendes Resultat zur Homotopieinvarianz:

Proposition 6.7. *Es seien (X, A) und (Y, B) Raumpaare und $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ stetige Abbildungen von Raumpaaren (d.h. $f(A) \subset B$ und $g(A) \subset B$). Falls f und g homotop sind und eine Homotopie $H : X \times [0, 1] \to Y$ so gewählt werden kann, dass $H(A \times [0, 1]) \subset B$ für alle $t \in [0, 1]$ (d.h. es handelt sich um eine Homotopie durch Abbildungen von Raumpaaren), so gilt*

$$f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$$

für alle $n \geq 0$.

Proof. Der früher konstruierte (von H induzierte) Prismaoperator $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ erfüllt $P(C_n(A)) \subset C_{n+1}(B)$, da sich H auf eine Homotopie $f|_A \simeq g|_A : A \to B$ einschränkt. Wir erhalten damit Abbildungen der Quotientenkomplexe

$$P : C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A) \to C_{n+1}(X)/C_{n+1}(A)$$

und diese erfüllen wieder die Gleichung

$$\partial \circ P + P \circ \partial = g_* - f_*$$

als Abbildungen $C_*(X, A) \to C_*(Y, B)$. Also sind g_* und f_* kettenhomotop. □

Es stellt sich die Frage, wie die relative Homologie $H_n(X, A)$ mit $H_*(X)$ und $H_*(A)$ zusammenhängen. Diese Frage wollen wir nun untersuchen.

Definition. Ein Kettenkomplex (C_*, ∂) heißt *exakt*, falls seine Homologie verschwindet, d.h. für alle $n \geq 0$ gilt

$$\operatorname{im} \partial_{n+1} = \ker \partial_n \, .$$

Ein Kettenkomplex heißt *kurz exakt*, falls er von der Gestalt

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

mit abelschen Gruppen A, B, C und exakt ist.

Von diesem Standpunkt aus betrachtet misst die Homologie eines Kettenkomplexes also sein Abweichen von der Exaktheit. Man kann Exaktheit gewisser Kettenkomplexe oft durch Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen ausdrücken. So ist

- $0 \to A \xrightarrow{f} B$ exakt genau dann, falls f inektiv ist,
- $B \xrightarrow{g} C \to 0$ exakt genau dann, falls g surjektiv ist,
- $0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$ exakt genau dann, falls f ein Isomorphismus ist und

- $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ exakt genau dann, falls f injektiv ist, $g \circ f = 0$ ist und g einen Isomorphismus $B/\operatorname{im} f \cong C$ induziert.

Sind A und C abelsche Gruppen, so erhalten wir eine offensichtliche kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \overset{a \mapsto (a,0)}{\to} A \oplus C \overset{(a,c) \mapsto c}{\to} C \to 0\,.$$

Aus der Existenz einer kurzen exakten Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ folgt jedoch nicht, dass $B \cong A \oplus C$ wie das Beispiel

$$0 \to \mathbb{Z} \overset{n \mapsto 2n}{\to} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$$

zeigt.

Definition. Eine *kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen* ist ein Diagramm der Form

$$0 \to A_* \xrightarrow{f_*} B_* \xrightarrow{g_*} C_* \to 0$$

von Kettenkomplexen A_*, B_* und C_* und Kettenabbildungen (wir fassen hier 0 als Kettenkomplex auf, der in jedem Grad die Null-Gruppe ist), so dass man in jedem Grad eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$$

erhält.

Ist (X, A) ein Raumpaar, so erhält man nach Definition von $C_*(X, A)$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to C_*(A) \to C_*(X) \to C_*(X, A) \to 0\,.$$

Es sei nun wieder $0 \to A_* \to B_* \to C_* \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen wie oben. Da es sich bei den Abbildungen $f_* : A_* \to B_*$ und $g_* : B_* \to C_*$ um Kettenabbildungen handelt, erhalten wir induzierte Abbildungen $f_* : H_*(A) \to H_*(B)$ und $g_* : H_*(B) \to H_*(C)$. Es stellt sich die Frage, ob man auf diese Weise wieder eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to H_*(A) \to H_*(B) \to H_*(C) \to 0$$

erhält. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall wie das Beispiel der singulären Homologie des Raumpaares $([0, 1], \{0, 1\})$ zeigt (man erhält im Grad $* = 0$ keine exakte Sequenz). Das folgende Ergebnis ist fundamental in der homologischen Algebra.

Proposition 6.8 (Schlangenlemma)**.** *Die obige exakte Sequenz* $0 \to A_* \to B_* \to C_* \to 0$ *induziert für alle* $n \geq 1$ *Gruppenhomomorphismen* $\phi_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$*, so dass die Folge*

$$\ldots \to H_n(A) \to H_n(B) \to H_n(C) \xrightarrow{\phi_n} H_{n-1}(A) \to \ldots \to H_0(B) \to H_0(C) \to 0$$

exakt ist.

Proof. Die Konstruktion von ϕ_n geht wie folgt: Es sei $x \in H_n(C)$ eine Homologieklasse, die durch $c \in C_n(C)$ repräsentiert wird. Da $B_n \xrightarrow{g_n} C_n$ surjektiv ist, gibt es ein $b \in B_n$ mit $g(b) = c$. Da g_* eine Kettenabbildung ist, gilt $g_{n-1}(\partial^B b) = 0$, also ist (wegen der Exaktheit von $0 \to A_{n-1} \to B_{n-1} \to C_{n-1} \to 0$) das Element b im Bild von f_{n-1}. Es sei $a \in A_{n-1}$ mit $f_{n-1}(a) = b$. Man zeigt nun folgendes

- $\partial^A(a) = 0$, d.h. a repräsentiert eine Homologieklasse $y \in H_{n-1}(A)$.
- Trifft man in der obigen Beschreibung andere Wahlen, d.h. wählt man c' mit $[c'] = [c] = x$, ein $b' \in B_n$ mit $f_n(b') = c'$ und $a' \in A_{n-1}$ mit $f_{n-1}(a') = \partial b'$, so ist a' homolog zu a, d.h. es gibt ein $z \in A_n$ mit $\partial^A(z) = a - a'$.

Wir erhalten somit durch die Setzung $\phi_n(x) := y$ eine wohldefinierte Abbildung $H_n(C) \to H_{n-1}(A)$. Diese ist ein Gruppenhomomorphismus: Sind $x_1, x_2 \in H_n(C)$ Homologieklassen, die durch c_1 und c_2 repräsentiert werden, und wählt man b_1, b_2 und a_1, a_2 gemäß der obigen Beschreibung, so sind $b_1 + b_2$ und $a_1 + a_2$ erlaubte Wahlen für die Homologieklase $x_1 + x_2 = [c_1 + c_2]$, so dass wir $\phi_n(x_1 + x_2) = [a_1 + a_2] = [a_1] + [a_2] = \phi_n(x_1) + \phi_n(x_2)$ erhalten. Entsprechend verfährt man mit additiven Inversen.

Nun ist zu zeigen, dass die erhaltene Folge

$$\ldots \to H_n(B) \to H_n(C) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(B) \to H_{n-1}(C) \to \ldots$$

wirklich exakt ist. Diese und die beiden obigen Aussagen zeigt man mit einer sogenannten *Diagrammjagd*. Die Details finden sich in Hatcher, S. 116 f. (siehe insbesondere Theorem 2.16). □

In der Regel bezeichnet man den Homomorphismus $\phi_n : H_n(C) \to H_{n-1}(A)$ auch mit ∂_n und nennt ihn *verbindenden Homomorphismus*. Angewandt auf die relativen Homologiegruppen erhalten wir also:

Satz 6.9. *Es sei* (X, A) *ein Raumpaar. Dann gibt es Homomorphismen* $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$*, die die Sequenz*

$$\ldots \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(X) \to \ldots$$

exakt machen.

Die verbindenen Homomorphismen ∂_n haben in diesem Kontext eine besonders einfache Beschreibung: Ist $x \in H_n(X, A)$ eine relative Homologieklasse, die durch eine Kette $c \in C_n(X)$ repräsentiert wird mit $\partial c \in C_{n-1}(A)$, so repräsentiert ∂c genau die Klasse $\partial_n(x) \in H_{n-1}(A)$.

Die letzte fundamentale Eigenschaft der singulären Homologie ist der folgende Satz:

Satz 6.10 (Ausschneidungssatz)**.** *Es sei (X, R) ein Raumpaar und $U \subset R$ eine Teilmenge mit $\overline{U} \subset \operatorname{int}(R)$. Dann induziert die Inklusion $(X - U, R - U) \to (X, R)$ Isomorphismen*

$$H_n(X - U, R - U) \to H_n(X, R)$$

für alle $n \geq 0$.

Wir werden den Ausschneidungssatz in der folgenden äquivalenten Formulierung beweisen: Seien $A, B \subset X$ Teilmengen, so dass $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$. Dann induziert die Inklusion $(A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ Isomorphismen in Homologie. Die Äquivalenz zum Ausschneidungssatz sieht man wie folgt: Sind Teilmengen $A, B \subset X$ mit $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$ gegeben, so können wir den Ausschneidungssatz mit $R := B$, $U := B - A \subset R$ anwenden und erhalten die gewünschte Aussage für die Inklusion $(A, A \cap B) \to (X, B)$. Sind umgekehrt R und U wie im Ausschneidungssatz, so betrachten wir die Teilmengen $A := X - U$, $B := R$ von X und wenden an, dass die Inklusion $(A, A \cap B) \to (X, B)$ Isomorphismen in Homologie induziert.

Topologisch beruht der Ausschneidungssatz auf der Tatsache, dass jede singuläre Kette in X auf systematische Weise durch eine Kette ersetzt werden kann (durch Verfeinerung von Simplizes), deren Simplizes entweder ganz in A oder ganz in B liegen. Dabei ist wichtig, dass X sogar vom Innern von A und von B überdeckt wird.

Dieser Übergang zu „feinen Ketten“ kann folgendermaßen formalisiert werden. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von X, so dass $X = \bigcup \operatorname{int}(U_i)$. Wir definieren $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ als den *$\mathcal{U}$-feinen* Unterkomplex von $C_*(X)$ der von singulären Simplizes erzeugt wird, deren Bild ganz in einem U_i liegen (dabei darf i vom jeweiligen Simplex abhängen). Dass es sich um einen Unterkomplex handelt, ist klar. Wir erhalten eine offensichtliche Inklusion von Kettenkomplexen

$$i : C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X)\,.$$

Proposition 6.11 (Verfeinerung von Ketten)**.** *Die Kettenabbildung i ist eine Kettenhomotopieäquivalenz. Insbesondere induziert sie Isomorphismen von Homologiegruppen. Darüberhinaus existieren ein Homotopieinverses $\rho : C_*(X) \to C_*^{\mathcal{U}}(X)$ und eine Kettenhomotopie*

$D : C_*(X) \to C_{*+1}(X)$ von $i \circ \rho$ nach $\mathrm{id}_{C_*(X)}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- $\rho \circ i = \mathrm{id}_{C_*^{\mathcal{U}}(X)}$.
- *Für alle $i \in I$ gilt: $\rho : C_*(X) \to C_*^{\mathcal{U}}(X)$ und $D : C_*(X) \to C_{*+1}(X)$ bilden Ketten, die ganz in U_i liegen, wieder auf Ketten ab, die ganz in U_i liegen.*

Bevor wir diese Proposition zeigen, folgern wir den Ausschneidungssatz: Es seien A, B Teilmengen von X wie in der alternativen Formulierung des Ausschneidungssatzes. Wir schreiben $C_*(A+B)$ statt $C_*^{\{A,B\}}(X)$ und wählen i, ρ und D wie in der Proposition. Wir erhalten induzierte Kettenabbildungen

$$\rho : C_*(X)/C_*(A) \to C_*(A{+}B)/C_*(A)\,,\ i : C_*(A{+}B)/C_*(A) \to C_*(X)/C_*(A)$$

mit $\rho \circ i = \mathrm{id}$ und $i \circ \rho \simeq \mathrm{id}$ vermöge der induzierten Kettenhomotopie

$$D : C_*(X)/C_*(A) \to C_{*+1}(X)/C_{*+1}(A),.$$

Für die Existenz dieser Abbildungen benutzen wir, dass die (ursprünglichen) Abbildungen i, ρ und D Simplizes in A wieder auf Simplizes in A abbilden. Die Inklusion $C_*(A{+}B)/C_*(A) \to C_*(X)/C_*(A)$ induziert also einen Isomorphismus von Homologiegruppen. Die von der Inklusion $C_*(B) \to C_*(X)$ induzierte Kettenabbildung $C_*(B)/C_*(A \cap B) \to C_*(A+B)/C_*(A)$ ist ein Isomorphismus von Kettenkomplexen (beide Seiten werden erzeugt von singulären Simplizes die ganz in B, und nicht ganz in A liegen). Daher induziert auch die Komposition

$$C_*(B)/C_*(A \cap B) \to C_*(A+B)/C_*(A) \to C_*(X)/C_*(A)$$

Isomorphismen von Homologiegruppen und das zeigt den Ausschneidungssatz.

Der Beweis von Proposition 6.11 beginnt mit der baryzentrischen Unterteilung affiner Simplizes.

Es sei $K := \langle v_0, \dots, v_n \rangle \subset \mathbb{R}^N$ ein affines Simplex. Sein *Schwerpunkt* ist definiert als der Punkt

$$b := \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1} v_i\,.$$

Wir definieren die *baryzentrische Unterteilung* von K durch Induktion über $\dim K$ als die Menge der Simplizes der Form $\langle b \rangle$, $\langle w_0, \dots, w_k \rangle$ oder $\langle b, w_0, w_1, \dots, w_k \rangle$ wobei $\langle w_0, \dots, w_k \rangle$ ein Simplex in der baryzentrischen Unterteilung einer Seite $\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$ von K ist. Ist $K := \langle v_0, \dots, v_n \rangle \subset \mathbb{R}^N$ ein beliebiges affines Simplex, so definieren wir den *Durchmesser* von S

$$\mathrm{diamK} := \max_{\mathrm{x,y \in K}} \|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|$$

Es gilt

$$\mathrm{diamK} \leq \max_{0 \leq \mathrm{i} < \mathrm{j} \leq \mathrm{n}} \|\mathrm{v_i} - \mathrm{v_j}\| \,,$$

denn ist $v = \sum t_i v_i \in K$ gegeben, und $w \in K$ beliebig, so gilt

$$\|w-v\| = \|\sum t_i(w-v_i)\| \leq \sum t_i \|w-v_i\| \leq \sum t_i \max_i \|w-v_i\| = \max_i \|w-v_i\| \,.$$

Man schätzt nun $\|v_i - w\|$ auf die gleiche Weise ab, indem man $w = \sum t'_i v_i$ schreibt.

Proposition 6.12. *Es sei $K = \langle v_0, \dots, v_n \rangle \subset \mathbb{R}^N$ ein affines Simplex. Dann gilt für jedes Simplex S der baryzentrischen Unterteilung von K*

$$\mathrm{diamS} \leq \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \mathrm{diamK} \,.$$

Proof. Es sei b der Schwerpunkt von K und $\langle w_0, \dots, w_l \rangle$ ein Simplex in der baryzentrischen Unterteilung von K. Es seien $0 \leq i < j \leq l$. Sind $w_i \neq b \neq w_j$, so liegen w_i und w_j in der baryzentrischen Unterteilung einer Seite von K, so dass die Behauptung durch Induktion über n folgt (man beachte hier, dass aus $k \leq n$ folgt, dass $k/(k+1) \leq n/(n+1)$). Sei nun $w_j = b$. Es genügt, den Abstand von w_j zu einer beliebigen Ecke v_i von K nach oben abzuschätzen. Es sei

$$b_i := \sum_{0 \leq \alpha \leq n, \alpha \neq i} \frac{1}{n} v_\alpha$$

der Schwerpunkt der $(n-1)$-dimensionalen Seite $\langle v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n \rangle$ von K, die v_i gegenüberliegt. Es ist dann

$$b = \frac{1}{n+1} v_i + \frac{n}{n+1} b_i$$

Damit ist $\|b - v_i\| = \frac{n}{n+1} \|b_i - v_i\|$. Da $\|b_i - v_i\| \leq \mathrm{diamK}$, folgt die Behauptung. □

Die baryzentrische Unterteilung affiner Simplizes kann wie folgt auf singuläre Ketten übertragen werden. Wir führen dies in zwei Schritten durch.

Es sei zunächst $Y \subset \mathbb{R}^N$ ein konvexer Teilraum. Wir definieren $LC_n(Y)$ als die Untergruppe von $C_n(Y)$, die von den affin-linearen singulären Simplizes

$$\Delta^n \to Y$$

erzeugt wird. Jedes solche affin-lineare Simplex ist durch die Bilder der Ecken $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ von Δ^n festgelegt, wir bezeichnen mit $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$

das affin-lineare Simplex in Y mit $e_i \mapsto v_i$. Jeder Randoperator schränkt sich zu einer linearen Abbildung

$$\partial_n : LC_n(Y) \to LC_{n-1}(Y)$$

ein, so dass wir auf diesem Wege einen Unterkomplex $LC_*(Y)$ von $C_*(Y)$ erhalten. Wir definieren weiterhin $LC_{-1}(Y) := \mathbb{Z}$ erzeugt vom *leeren Simplex* $\langle \emptyset \rangle$ und den Randopertor $\partial_0 : LC_0(Y) \to LC_{-1}(Y)$ durch $\partial_0(\langle v_0 \rangle) := 1$ für alle $v_0 \in Y$. Damit erhalten wir $CL_*(Y)$ als *augmentierten Kettenkomplex* mit einem Eintrag im Grad -1 isomorph zu $\mathbb{Z}$. Ist $b \in Y$ ein beliebiger Punkt, so erhalten wir lineare Abbildungen $b : LC_n(Y) \to LC_{n+1}(Y)$ („Kegel mit Spitze b“) durch die Setzungen $b(\langle \emptyset \rangle) := \langle b \rangle$ und

$$b(\langle v_0, \ldots, v_n \rangle) := \langle b, v_0, \ldots, v_n \rangle .$$

Proposition 6.13. *Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ gilt die Formel*

$$\partial b + b\partial = \mathrm{id}$$

wobei wir $\partial_{-1} := 0$ setzen. Insbesondere definiert b eine Kettenhomotopie auf dem augmentierten Komplex $LC_*(Y)$ von der Identität zur Nullabbildung.

Motiviert durch die obige Konstruktion der baryzentrischen Unterteilung definieren wir für $n \geq 0$ den *Unterteilungsoperator* $S : LC_n(Y) \to LC_n(Y)$ induktiv als die Identität auf LC_0 und LC_{-1} und, falls $S : LC_n(Y) \to LC_n(Y)$ schon definiert wurde, definieren wir $S : LC_{n+1}(Y) \to LC_{n+1}(Y)$ durch

$$S(\sigma) := b_\sigma(S(\partial\sigma)) ,$$

wobei $\sigma : \Delta^{n+1} \to Y$ ein lineares Simplex ist und $b_\sigma := \sigma(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{n+2} e_i)$ das Bild des Schwerpunktes von σ bezeichnet.

Proposition 6.14. *Der baryzentrische Unterteilungsoperator S ist eine Kettenabbildung $LC_*(Y) \to LC_*(Y)$.*

Proof. Direkt aus der Definition folgt, dass S auf $LC_1(Y)$ (ebenso wie auf $LC_0(Y)$) die Identität ist. Daher gilt $\partial S = S\partial$ auf $LC_0(Y)$ und auf $LC_{-1}(Y)$. Falls $\sigma \in LC_n(Y)$ ein lineares Simplex ist mit $n \geq 1$, so erhalten wir

$$\partial(S\sigma) = \partial\big(b_\sigma(S(\partial\sigma)\big) = S\partial\sigma - b_\sigma(\partial S \partial\sigma) = S\partial\sigma .$$

Die zweite Gleichheit gilt wegen $\partial b_\sigma + b_\sigma \partial = \mathrm{id}$ und die letzte Gleichheit benutzt die Tatsache, dass $\partial S = S\partial$ auf $LC_n(Y)$ durch Induktion über n. □

Die folgende Aussage formalisiert die entscheidende Eigenschaft des Unterteilungsoperators S.

Proposition 6.15. *Die Kettenabbildung $S : LC_*(Y) \to LC_*(Y)$ ist kettenhomotop zur Identität.*

Proof. Die Kettenhomotopie $T : LC_n(Y) \to LC_{n+1}(Y)$ wird für $n = -1$ als Null definiert und durch die Formel

$$T(\sigma) := b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma)$$

für $n \geq 0$. Die Gleichung

$$\partial T + T\partial = \mathrm{id} - S$$

auf $LC_n(Y)$, $n \geq 0$, zeigt man wieder durch Induktion über n mit einer direkten Rechnung (siehe Hatcher, S. 122 Mitte). An dieser Stelle ist die Augmentierung nützlich. $\square$

Wir können nun diese Konstruktionen nun auf beliebige singuläre Ketten ausdehnen. Sei also X ein topologischer Raum und $\sigma : \Delta^n \to X$ ein singuläres Simplex. Wir setzen

$$S(\sigma) := \sigma_*(S(\mathrm{id}_{\Delta^n}))\,,$$

wobei wir id_{Δ^n} als lineares Simplex in der konvexen Menge $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ auffassen und $\sigma_* : LC_n(\Delta^n) \subset C_n(\Delta^n) \to C_n(X)$ die von σ induzierte Kettenabbildung ist. Ganz analog definieren wir $T : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ auf $\sigma \in C_n(X)$ durch

$$T(\sigma) := \sigma_*(T(\mathrm{id}_{\Delta^n}))\,.$$

Man zeigt nun durch explizite Rechnungen (vgl. Hatcher, S. 122 unten und S. 123 oben).

Proposition 6.16. *S ist eine Kettenabbildung $C_*(X) \to C_*(X)$ und T ist eine Kettenhomotopie von S zur Identität auf $C_*(X)$.*

Um zu beliebig kleinen singulären Simplizes zu gelangen, müssen wir den Unterteilungsoperator noch iterieren. Mit einer leichten Rechnung (siehe Hatcher, S. 123, Punkt 4) erhält man:

Proposition 6.17. *Es sei $m \geq 0$. Dann ist der iterierte Unterteilungsoperator $S^m = S \circ S \ldots \circ S$ eine Kettenabbildungen $C_*(X) \to C_*(X)$ und kettenhomotop zur Identität. Eine Kettenhomotopie ist durch $D_m := \sum_{0 \leq i < m} T \circ S^i$ gegeben, wobei $T : C_*(X) \to C_{*+1}(X)$ die oben betrachtete Kettenhomotopie ist.*

Wir kommen nun zum Beweis von Proposition 6.11. Die entscheidende Beobachtung ist: Für jedes singuläre Simplex $\sigma : \Delta^n \to X$ existiert ein $m \geq 0$, so dass $S^m(\sigma) \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$. Dazu betrachtet man die Überdeckung von Δ^n durch die Familie $(\sigma^{-1}(\mathrm{int}(U_i))$ offener Teilmengen, wählt eine Lebesgue-Zahl ϵ für diese Überdeckung (d.h. jede Teilmenge von Δ^n mit Durchmesser $< \epsilon$ ist ganz in einer Menge aus dieser Üeberdeckung enthalten). An diesem Punkt ist es wichtig, dass wir eine offene Überdeckung von Δ^n haben (sonst existiert nicht unbedingt eine Lebesgue-Zahl) und dazu brauchten wir die Tatsache, dass bereits $(\mathrm{int}U_i)$ eine Überdeckung von X bilden (und dies korrespondiert ja letztlich zur Bedingung $\overline{U} \subset \mathrm{int}(A)$ im Ausschneidungssatz). Wählen wir m nun so groß, dass $(n/(n+1))^m \leq \epsilon$, so gilt also $S^m(\sigma) \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$ wie gewünscht. Wir definieren für jedes $\sigma : \Delta^n \to X$ die Zahl $m(\sigma)$ als die kleinste Zahl m mit dieser Eigenschaft - es gilt dann offensichtlich $S^k(\sigma) \in C_*^{\mathcal{U}}(X)$ für alle $k \geq m(\sigma)$. Die kleine technische Schwierigkeit an dieser Stelle ist nur, dass $m(\sigma)$ von σ abhängt. Das ist aber kein echtes Problem:

Es sei $D : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$ durch die Gleichung

$$\sigma \mapsto D_{m(\sigma)}(\sigma) \in C_{n+1}(X)$$

definiert. Aus der Gleichung

$$\partial D_{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma$$

(Proposition 6.17) folgt nun

$$\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \left(S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma)\right)$$

und wenn wir $\rho(\sigma)$ als den Ausdruck in den großen Klammern rechts definieren, erhalten wir $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma)$. Und außerdem folgt aus dieser Definition, dass $\rho(\partial\sigma) = \partial(\rho(\sigma))$, d.h. $\rho : C_*(X) \to C_*(X)$ ist eine Kettenabbildung und kettenhomotop zur Identität vermittels der Kettenhomotopie D. Wir behaupten nun, dass das Bild von ρ tatsächlich in $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ liegt. Sei dazu $\sigma : \Delta^n \to X$ ein singuläres Simplex. Wir müssen zeigen, dass

$$S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}(\partial\sigma) - D(\partial\sigma) \in C_*^{\mathcal{U}}(X)\,.$$

Dies ist für den ersten Summanden klar. Für die verbleibende Differenz beachtet man, dass für σ_j, die Restriktion von σ auf die j-te Seite von Δ^n, gilt: $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$ (denn die j-te Seite ist ja eine Teilmenge von Δ^n). Daher besteht $(D_{m(\sigma)} - D)(\partial\sigma)$ aus Summanden der Form $\sum_{m(\sigma_j) \leq i < m(\sigma)} T \circ S^i(\sigma_j)$. Jeder dieser Summanden liegt in $C_*^{\mathcal{U}}(X)$, denn dies gilt für $S^i(\sigma_j)$, falls $i \geq m(\sigma_j)$ und außerdem bildet die Kettenhomotopie T Elemente in $C_*^{\mathcal{U}}(X)$ wieder auf solche ab (dies sieht man direkt mit der Definition von T). Wir haben damit die gesuchte Kettenabbildung $\rho : C_*(X) \to C^{\mathcal{U}}(X)$ gefunden. Da $m(\sigma) = 0$, falls σ schon $\mathcal{U}$-fein ist, gilt $\rho \circ i = \mathrm{id}_{C_*^{\mathcal{U}}(X)}$. Weiterhin ist D eine Kettenhomotopie von $i \circ \rho$ nach $\mathrm{id}_{C_*(X)}$ und D und ρ haben die zusätzlich in Proposition 6.11 angegebenen Eigenschaften. Dies folgt direkt aus der Konstruktion von ρ und von D.

Damit ist der Beweis von Proposition 6.11 und damit auch der Beweis der Ausschneidungssatzes abgeschlossen.

Wir haben jetzt die fundamentalen Eigenschaften der singulären Homologietheorie nachgewiesen. Wir fassen sie in den *Eilenberg-Steenrod Axiomen* für eine Homologietheorie zusammen.

Definition.(Eilenberg-Steenrod-Axiome) Eine *Homologietheorie* ist eine Folge von Funktoren

$$H_n : Top(2) \to AbGp\,,$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$, und natürlichen Transformationen $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(X, \emptyset)$ $n \in \mathbb{Z}$, mit den folgenden Eigenschaften (wir schreiben im folgenden der Kürze wegen $H_n(X)$ statt $H_n(X, \emptyset)$):

- (Homotopieinvarianz) Es seien $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ stetige Abbildungen, die als Abbildungen von Raumpaaren homotop sind. Dann gilt $f_* = g_* : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$.
- (lange exakte Sequenz) Die Inklusionen $A \hookrightarrow X$ und $X = (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$ induzieren eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \to \ldots$$

- (Ausschneidung) Ist $U \subset A$ eine Teilmenge mit $\overline{U} \subset \mathrm{int}(A)$, dann induziert die Inklusion $(X - U, A - U) \to (X, A)$ Isomorphismen $H_n(X - U, A - U) \to H_n(X, A)$.

Ist (H_n, ∂_n) eine Homologietheorie in diesem Sinne, so nennt man die Folge von abelschen Gruppen $(H_n(\{P\}))_{n\in\mathbb{Z}}$ die *Koeffizienten* der Theorie. Falls die Koeffizienten in allen Graden außer im Grad 0 die Nullgruppe sind, nennt man die Homologietheorie *gewöhnlich*. Oft verlangt man auch noch, dass eine Homologietheorie das *Summenaxiom* erfüllt: Für eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von topologischen Räumen induzieren die Inklusionen $X_i \hookrightarrow X$ in die disjunkte Summe $\dot{\bigcup} X_i$ (mit der Summentopologie) Isomorphismen $\bigoplus_{i\in I} H_n(X_i) \cong H_n(X)$.

Es handelt sich also bei der singulären Homologie um eine gewöhnliche Homologietheorie im Eilenberg-Steenrodschen Sinne, die das Summenaxiom erfüllt. Die Berechnungen und Anwendungen in den folgenden Kapiteln werden in der Regel nur auf diese Axiome zurückgreifen und nicht auf die explizite Konstruktion der singulären Homologietheorie mittels singulärer Ketten.

Wir werden später sehen, dass eine Homologietheorie in diesem axiomatischen Sinne, die das Summenaxiom erfüllt, auf der Kateogorie der sogenannten CW-Komplexe (diese wird später definiert und umfasst z.B. die Kategorie der Simplizialkomplexe) festgelegt ist, wenn man die Koeffizienten der Theorie kennt.

7. Erste Berechnungen und Anwendungen

Wir geben zunächst eine alternative Beschreibung der relativen Homologiegruppen. Hierzu ist es nützlich die sogenannten *reduzierten* Homologiegruppen zu betrachten.

Ist X ein topologischer Raum, so definieren wir die *reduzierte Homologie* $\widetilde{H}_*(X)$ von X als die Homologie des Kettenkomplexes

$$\ldots C_2(X) \stackrel{\partial_2}{\to} C_1(X) \stackrel{\partial_1}{\to} C_0(X) \stackrel{\epsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0\,,$$

wobei ∂_n die üblichen Randabbildungen sind und

$$\epsilon : \sum_{\sigma \in \Delta_0(X)} \lambda_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum \lambda_\sigma \in \mathbb{Z}$$

der sogenannte *Augmentierungshomomorphismus* ist (dieser trat bei der Berechnung der Homologie eines wegzusammenhängenden Raumes schon einmal auf). Offensichtlich ist $\epsilon \circ \partial_1 = 0$. Wir fassen den Gruppe $\mathbb{Z}$ ganz rechts im obigen Kettenkomplex als Eintrag im Grad -1 auf, so dass möglicherweise auch Homologie im Grad -1 entstehen kann. Wir definieren noch die relativen reduzierten Homologiegruppen $\widetilde{H}_n(X, A) := H_n(X, A)$ für alle n (auch falls $A = \emptyset$).

Offensichtlich definieren die reduzierten Homologiegruppen wieder Funktoren *Top* $\to$ *AbGp*, bzw. *Top*(2) $\to$ *AbGp* und homotope Abbildungen induzieren die gleichen Abbildungen in Homologie. Weiterhin haben wir

Proposition 7.1.
- *$\widetilde{H}_n(X) = H_n(X)$ für alle $n \geq 1$.*
- *Falls $X \neq \emptyset$, so existiert ein kurze exakte Sequenz $0 \to \widetilde{H}_0(X) \to H_0(X) \stackrel{\pi_*}{\to} \mathbb{Z} \to 0$, wobei $\pi : X \to \{P\}$ die Abbildung auf den einpunktigen Raum ist und wir $H_0(\{P\})$ mit $\mathbb{Z}$ identifizieren. Wir können also $\widetilde{H}_0(X)$ mit $\ker \pi_*$ identifizieren. Diese kurze exakte Sequenz spaltet, wobei man als Spalt eine Abbildung $i_* : H_0(\{P\}) \to H_0(X)$ nehmen kann, die von einer beliebigen Inklusion $i : \{P\} \hookrightarrow X$ induziert ist. Diese Abbildung i_* hängt dann davon ab, in welche Wegekomponenten von X der Punkt*

P abgebildet wird. Insbesondere ist also $H_0(X) \cong \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$, jedoch nicht auf kanonische Weise.

- *Falls X kontrahierbar ist, so ist $\widetilde{H}_n(X) = 0$ für alle n. Diese Tatsache ist der Hauptgrund für die Betrachtung der reduzierten Homologie.*
- *Falls $X = \emptyset$, so ist $\widetilde{H}_n(X) = 0$ für $n \geq 0$ und $\widetilde{H}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$.*
- *Ist (X, A) ein beliebiges Raumpaar, so existiert eine lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to \widetilde{H}_1(X, A) \to \widetilde{H}_0(A) \to \widetilde{H}_0(X) \to \widetilde{H}_0(X, A) \to \widetilde{H}_{-1}(A) \to \widetilde{H}_{-1}(X) \to 0$$

Proof. Die Beweise der ersten drei Aussagen sind einfache Übungen. Die letzte Aussage ist klar, falls $A = \emptyset$. Falls $A \neq \emptyset$, so benutzt man die Identifizierung $\widetilde{H}_0(X) = \ker \pi_*$ von eben (und genauso für A) und beachtet, dass das Bild des verbindenden Homomorphismus $H_1(X, A) \to H_0(A)$ in $\ker \pi_*$ liegt. □

Definition. Es sei (X, A) ein Raumpaar. Wir nennen (X, A) *gut*, falls $A \neq \emptyset$, A abgeschlossen in X und A starker Deformationsretrakt einer Umgebung von A ist, d.h. es gibt eine Umgebung U von A in X und eine stetige Abbildung $r : U \to A$, so dass die Komposition $U \xrightarrow{r} A \hookrightarrow U$ homotop zu id_U relativ A ist (d.h. Punkte in A bleiben während der gesamten Homotopie konstant, insbesondere ist $r|_A = \mathrm{id}_A$).

Ist (X, A) gut, so gibt es also insbesondere eine Umgebung U von A in X, so dass die Inklusion $A \hookrightarrow U$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Beispiel. Das Paar (D^n, S^{n-1}) ist gut für alle $n \geq 0$.

Wir erhalten nun das folgende wichtige Resultat: Relative Homologiegruppen sind für gute Raumpaare nichts anderes als die reduzierten Homologiegruppen eines Quotientenraumes.

Proposition 7.2. *Es sei (X, A) ein gutes Raumpaar. Dann induziert die Quotientenabbildung $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ Isomorphismen*

$$H_n(X, A) \to H_n(X/A, A/A) = \widetilde{H}_n(X/A)$$

für alle $n \geq 0$.

Proof. Wegen $A \neq \emptyset$ ist $A/A \subset X/A$ einfach ein Punkt und wir erhalten durch Betrachtung der langen exakten Sequenz für reduzierte Homologie

$$\ldots \to \widetilde{H}_n(A/A) \to \widetilde{H}_n(X/A) \to \widetilde{H}_n(X/A, A/A) \to \widetilde{H}_{n-1}(A/A) \to \ldots$$

und wegen $\widetilde{H}_n(A/A) = 0$ für alle n, dass die von der Inklusion $(X/A, \emptyset) \to (X/A, A/A)$ induzierten Abbildungen $\widetilde{H}_n(X/A) \to \widetilde{H}_n(X/A, A/A) = H_n(X/A, A/A)$ für alle $n \geq 0$ Isomorphismen sind. Daher können wir $H_n(X/A, A/A)$ und $\widetilde{H}_n(X/A)$ identifizieren. Es sei nun $U \subset X$ eine Umgebung, so dass $A \subset U$ ein starker Deformationsretrakt ist. Wir betrachten das induzierte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(X,A) & \longrightarrow & H_n(X,U) & \longleftarrow & H_n(X-A, U-A) \\
\downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\
H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, U/A) & \longleftarrow & H_n(X/A - A/A, U/A - A/A)
\end{array}$$

Die linke obere und linke untere Abbildung ist ein Isomorphismus wie man an der langen exakten Sequenz für das Tripel (X, U, A), bzw. für das Tripel $(X/A, U/A, A/A)$ sieht. Man beachte dabei, dass die Inklusionen $(A, A) \to (U, A)$ und $(A/A, A/A) \to (U/A, A/A)$ Homotopieäquivalenzen von Paaren sind, da $A \to U$ starker Deformationsrektrakt ist. Somit ist $H_n(U, A) = H_n(A, A) = 0$ und entsprechend $H_n(U/A, A/A) = 0$ für alle n. Dies impliziert, dass in der langen exakten Sequenz für die betrachteten Tripel jeder dritte Term 0 ist. Die rechte obere und rechte untere Abbildung sind Isomorphismen nach dem Ausschneidungssatz. Die rechte vertikale Abbildung ist ein Isomorphismus, da die Abbildung $q : X \to X/A$ einen Homöomorphismus von Raumpaaren $(X - A, U - A) \to (X/A - A/A, U/A - A/A)$ induziert (hier ist wichtig, dass A abgeschlossen in X ist). Da das Diagramm kommutiert, ist auch die linke vertikale Abbildung ein Isomorphismus und das war zu zeigen. $\square$

Ist (X, A) ein gutes Raumpaar, so induziert die lange exakte Homologiesequenz also eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \widetilde{H}_n(A) \to \widetilde{H}_n(X) \to \widetilde{H}_n(X/A) \to \widetilde{H}_{n-1}(A) \to \ldots$$

wendet man dies auf das Raumpaar (D^n, S^{n-1}) an und beachtet, dass D^n/S^{n-1} und S^n homöomorph sind (warum?), so erhalten wir per Induktion über $n \geq 0$ das folgende grundlegende Resultat.

Satz 7.3. *Es ist*

$$\widetilde{H}_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } i = n \\ 0 & \text{falls } i \neq n \end{cases}$$

Zur Erinnerung: Ist X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Teilraum, so heißt A ein *Retrakt* von X, falls es eine stetige Abbildung (Retraktion) $r : X \to A$ gibt mit $r|_A = \mathrm{id}_A$.

Satz 7.4. *Ist $n \geq 0$, so ist S^n kein Retrakt von D^{n+1}.*

Proof. Angenommen $r : D^{n+1} \to S^n$ ist eine Rektration. Die Inklusion $S^n \to D^{n+1}$ werde mit i bezeichnet. Dann gilt also $r \circ i = \mathrm{id}_{S^n}$. Nach Anwendung des reduzierten Homologiefunktors erhalten wir, dass die Komposition

$$\widetilde{H}_n(S^n) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(D^{n+1}) \xrightarrow{r_*} \widetilde{H}_n(S^n)\,.$$

mit der Identität auf $\widetilde{H}_n(S^n)$ übereinstimmt. Setzen wir unsere Berechnungen ein, erhalten wir also eine Komposition der Form $\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z}$, die mit $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ übereinstimmt. Dies ist aber nicht möglich. □

Korollar 7.5 (Brouwerscher Fixpunktsatz)**.** *Es sei $f : D^n \to D^n$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in D^n$ mit $f(x) = x$.*

Proof. Angenommen $f : D^n \to D^n$ ist eine fixpunktfreie stetige Abbildung. Wir konstruieren eine stetige Abbildung $r : D^n \to S^{n-1}$, indem wir für $x \in D^n$ den Strahl, der in $f(x)$ beginnt und durch x läuft bis zum Rand von D^n verlängern und den entstehenden Schnittpunkt mit $r(x)$ bezeichnen. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass diese Abbildung stetig ist. Offensichtlich gilt $r|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$, d.h. r ist eine Retraktion von D^n auf S^{n-1}. Dies steht aber im Widerspruch zum eben bewiesenen Satz. □

Wir können nun auch die topologische Invarianz der Dimension euklidischer Räume beweisen.

Satz 7.6. *Es seien $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere offene Teilmengen. Falls U und V homöomorph sind, gilt $m = n$.*

Proof. Für $x \in U$ betrachten wir die *lokalen Homologiegruppen* von U in x, definiert als $H_k(U, U - \{x\})$ $(k \in \mathbb{N})$. Nach dem Ausschneidungssatz, der langen exakten Homologiesequenz zusammen mit der Zusammenziehbarkeit von $\mathbb{R}^m$, sowie der Homotopieinvarianz ist

$$H_k(U, U - \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^m - \{x\}) \cong \widetilde{H}_{k-1}(S^{m-1})$$

d.h. $H_k(U, U - \{x\}) \cong \mathbb{Z}$, falls $k = m$ und $= 0$ sonst. Entsprechend verhalten sich die lokalen Homologiegruppen $H_k(V, V - \{y\})$ für $y \in V$. Ist $\phi : U \to V$ ein Homöomorphismus, so erhalten wir für $x \in U$ einen induzierten Homöomorphismus von Raumpaaren $(U, U - \{x\}) \approx (V, V - \{\phi(x)\})$ und dadurch induzierte Isomorphismen von lokalen Homologiegruppen. Somit ist $m = n$. □

Falls $x \in X$ und $\{x\}$ abgeschlossen in X ist (dies ist z.B. der Fall, wenn X Hausdorffsch ist), so hängen nach dem Ausschneidungssatz die lokalen Homologiegruppen an x nur von der Topologie von X in einer Umgebung von x ab.

Der Satz von der topologischen Invarianz der Dimension kann meines Wissens nicht mit elementaren Methoden gezeigt werden.

8. Δ-Komplexe und ihre Homologie

Wir werden in diesem Abschnitt Verallgemeinerungen von Simplizialkomplexen kennenlernen und ihre Homologie berechnen. Wir bezeichnen wie üblich mit Δ^n das Standard-n-Simplex und mit $\mathrm{int}(\Delta^n)$ sein Inneres, d.h. $\Delta^n - \partial\Delta^n$, wobei $\partial\Delta^n$ der Rand von Δ^n ist (d.h. die Vereinigung der höchstens $(n-1)$-dimensionalen Seiten).

Definition. Ein Δ-*Komplex* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Familie $(\sigma_\alpha)_{\alpha\in I}$ von stetigen Abbildungen (genannt *charakteristische Abbildungen*) $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X$ so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Die Restriktion $\sigma_\alpha|_{\mathrm{int}\Delta^{\mathrm{n}(\alpha)}} : \mathrm{int}\Delta^{\mathrm{n}(\alpha)} \to X$ ist injektiv und jeder Punkt in X liegt im Bild („offenes Simplex“) genau einer solchen Restriktion.
- Ist $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X$ eine charakteristische Abbildung und $\tau \subset \Delta^{n(\alpha)}$ eine $(n(\alpha)-1)$-dimensionale Seite, so ist $\sigma_\alpha|_\tau : \Delta^{n(\alpha)-1} \to X$ wieder eine charakteristische Abbildung wobei wir τ und $\Delta^{n(\alpha)-1}$ kanonisch identifizieren (dabei soll die Ordnung der Ecken erhalten bleiben).
- $A \subset X$ ist offen genau dann, falls alle $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ offen in $\Delta^{n(\alpha)}$ sind.

Die geometrische Realisierung jedes geordneten Simplizialkomplexes besitzt offensichtlich die Struktur eines Δ-Komplexes, es gibt aber viele Δ-Komplexe, die nicht direkt als Simplizialkomplex beschrieben werden können: In einem Simplizialkomplex sind die Simplizes durch ihre Ecken schon eindeutig festegelegt, dies ist jedoch in einem Δ-Komplex nicht unbedingt der Fall.

Ist X ein Δ-Komplex, so sei $C_n^\Delta(X)$ die freie abelsche Gruppe, die von den Abbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X$ erzeugt wird, wobei $n(\alpha) = n$. Dies ist eine Untergruppe der singulären n-Ketten $C_n(X)$ und die Einschränkung des Randopertors $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ auf $C^\Delta(X)$ definiert eine Abbildung $\partial : C_n^\Delta(X) \to C_{n-1}^\Delta(X)$. Dies folgt aus dem zweiten Punkt obiger Definition. Damit wird $C_*^\Delta(X)$ ein Unterkomplex von $C_*(X)$. Wir bezeichnen mit $H_*^\Delta(X)$ die Homologiegruppen des Kettenkomplexes $C_*^\Delta(X)$.

Allgemeiner sei X ein Δ-Komplex und $A \subset X$ ein Teilkomplex (d.h A ist eine Teilmenge von X und ist selbst ein Δ-Komplex, wobei alle charakteristischen Abbildungen von A auch charakteristische Abbildungen von X sind). Wir definieren dann den Kettenkomplex $C_*^\Delta(X, A)$ wie üblich als den Quotientenkomplex $C_*^\Delta(X)/C_*^\Delta(A)$. Es ist wieder $C_*^\Delta(X, A)$ ein Unterkomplex von $C_*(X, A)$.

Ist X ein geordneter Simplizialkomplex, dann stimmt $C_*^\Delta(X)$ (mit der induzierten Δ-Komplex-Struktur auf X) mit dem simplizialen Kettenkomplex überein, wie er im ersten Abschnitt definiert wurde. Insbesondere folgt aus dem nächsten Satz, dass simpliziale und singuläre Homologie für Simplizialkomplexe übereinstimmen.

Satz 8.1. *Es sei X ein Δ-Komplex und $A \subset X$ ein Unterkomplex, möglicherweise $A = \emptyset$. Dann induziert die Inklusion $C_*^\Delta(X, A) \hookrightarrow C_*(X, A)$ Isomorphismen von Homologiegruppen.*

Als Vorbereitung brauchen wir

Lemma 8.2. *Für $n \geq 0$ ist die relative singuläre Homologiegruppe $H_i(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ für $i = n$ und $= 0$ sonst. Die Identität*

$$\Delta^n \to \Delta^n$$

aufgefasst als Element in $C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ ist ein Zykel und die entsprechende Homologieklasse erzeugt $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Proof. Alle Aussagen bis auf die letzte sind klar (man beachte $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \approx (D^n, S^{n-1})$. Diese wird per Induktion gezeigt, wobei der Fall $n = 0$ trivial ist. Angenommen, die Aussage ist für $n - 1$ gezeigt. Es sei $\Lambda \subset \Delta^n$ die Vereinigung von genau n der $(n-1)$-dimensionalen Seiten von Δ^n (d.h. Λ umfasst alle bis auf eine $(n-1)$-dimensionale Seite). Das Raumpaar (Δ^n, Λ) hat verschwindende Homologie (dies ist leicht zu sehen). Daher ist der verbindende Homomorphismus

$$\phi : H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$$

in der langen exakten Sequenz für das Tripel $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ ein Isomorphismus. Wir betrachten die Inklusion $\Delta^{n-1} \hookrightarrow \partial\Delta^n$ als die fehlende Seite in Λ. Die induzierte Inklusion $(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \to (\partial\Delta^n, \Lambda)$ induziert einen Isomorphismus

$$\psi : H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \cong H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$$

von relativen Homologiegruppen, denn es handelt sich um gute Raumpaare und die induzierte Abbildung

$$\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \to \partial\Delta^n/\Lambda$$

ist ein Homöomorphismus. Der Isomorphismus ϕ schickt den Zykel id_{Δ^n} auf den Zykel $\pm\,\mathrm{id}_{\Delta^{n-1}}$ (aufgefasst als die fehlende Seite in Λ) in $C_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$, der Isomorphismus ψ schickt den Zykel $\mathrm{id}_{\Delta^{n-1}}$ auf genau den gleichen Zykel (eventuell bis aufs Vorzeichen). Daher folgt die Aussage des Lemmas per Induktion. □

Schließlich benötigen wir noch die folgende rein algebraische Aussage.

Proposition 8.3. *(Fünferlemma). Es sei ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

gegeben, wobei die Zeilen exakte Sequenzen abelscher Gruppen sind. Sind von den vertikalen Abbildungen alle bis auf γ Isomorphismen, so ist auch γ ein Isomorphismus.

Proof. Diagrammjagd. □

Wir zeigen nun Satz 8.1. Es sei zunächst X endlich dimensional und $A = \emptyset$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei X^k das *k-Skelett* von X, d.h. die Vereinigung der Bilder von Simplizes der Dimension höchstens k (aufgefasst als Unterkomplex von X). Wir zeigen nun durch Induktion nach k, dass die Abbildungen $H_n^\Delta(X^k) \to H_n(X^k)$ Isomorphismen sind (für alle n). Der Fall $k = 0$ ist einfach, denn $X^0 \subset X$ erbt von X die diskrete Topologie: Ist $Z \subset X^0$ eine Teilmenge, so ist für alle α das Urbild $\phi_\alpha^{-1}(Z) \subset \Delta_\alpha^{n(\alpha)}$ (bestehend aus einer Menge von Ecken) endlich und somit abgeschlossen. Also ist Z eine abgeschlossene Teilmenge in X nach dem dritten Punkt in obiger Definition eines Δ-Komplexes. Daraus folgt, dass jede Teilmenge von X^0 (in der Unterraumtopolologie) offen in X^0 ist und das war zu zeigen.

Wir nehmen nun an, die Aussage ist für $k-1$ gezeigt. Für $n \geq 0$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k) & \longrightarrow & H_n^\Delta(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}^\Delta(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \end{array}$$

Wir wollen das Fünferlemma anwenden. Der zweite und letzte senkrechte Pfeil sind Isomorphismen durch Induktion nach k. Wir kümmern uns nun um den ersten und vierten Pfeil. Die Gruppe $H_n^\Delta(X^k, X^{k-1})$ ist $= 0$, falls $k \neq n$ und isomorph zur direkten Summe von Kopien von $\mathbb{Z}$ parametrisiert über die n-Simplizes $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$, falls $k = n$. Dies folgt direkt aus der Definition von H_*^Δ. Für die Berechnung der entsprechenden singulären Homologiegruppen betrachten wir die Abbildung

$$\psi : \dot{\bigcup}_{\alpha, n(\alpha)=k} (\Delta^k_\alpha, \partial\Delta^k_\alpha) \to (X^k, X^{k-1})$$

wobei auf dem α-ten Raumpaar die Abbildung σ_α anzuwenden ist. Diese Abbildung induziert einen Homöomorphismus

$$\Psi : \dot{\bigcup}\Delta^k_\alpha / \dot{\bigcup}\partial\Delta^k_\alpha \approx X^k/X^{k-1}\,.$$

Dabei ist die Bijektivität und Stetigkeit leicht. Es sind aber auch Bilder von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen: Sei dazu $A \subset \dot{\bigcup}\Delta^k/\dot{\bigcup}\partial\Delta^k$ abgeschlossen, also A ist Bild einer abgeschlossenen Menge $\overline{A} \subset \dot{\bigcup}\Delta^k$ unter der Abbildung $\dot{\bigcup}\Delta^k \to \dot{\bigcup}\Delta^k/\dot{\bigcup}\partial\Delta^k$. Wir müssen zeigen, dass das Urbild von $\Psi(A)$ in X^k abgeschlossen ist, was wir dadurch testen, dass wir die Urbilder unter ϕ_α ansehen (für alle charakteristischen Abbildungen der Δ-Komplexstruktur von X^k).

Sei zunächst $n(\alpha) < k$. Falls $\Psi(A) \cap [X^{k-1}] \neq \emptyset$ (hier bezeichnet $[X^{k-1}]$ den Punkt X^{k-1} in dem Quotienten X^k/X^{k-1}), d.h. $\overline{A} \cap \dot{\bigcup}\partial\Delta^k_\alpha \neq \emptyset$, dann ist dieses Urbild ganz $\Delta^{n(\alpha)}_\alpha$, also abgeschlossen. Falls jedoch $\Psi(A) \cap [X^{k-1}] = \emptyset$, so ist dieses Urbild leer, also ebenfalls abgeschlossen.

Es sei nun $n(\alpha) = k$. Dann stimmt dieses Urbild genau mit dem Urbild von A unter der stetigen Abbildung $\Delta^k_\alpha \hookrightarrow \dot{\bigcup}_{n(\alpha)=k}\Delta^k_\alpha \to \dot{\bigcup}\Delta^k_\alpha/\dot{\bigcup}\partial\Delta^k_\alpha$ überein und ist damit wieder abgeschlossen.

Insgesamt induziert also ψ einen Isomorphismus von relativen Homologiegruppen (denn es handelt sich um gute Raumpaare). Die Gruppe

$$H_n(\dot{\bigcup}\Delta^k_\alpha, \dot{\bigcup}\partial\Delta^k_\alpha)$$

ist aber gleich 0, falls $n \neq k$ und isomorph zur direkten Summe von Kopien von $\mathbb{Z}$ parametrisiert über die n-Simplizes von X, falls $n = k$ Weiterhin ist nach dem vorigen Lemma ein Erzeuger der Gruppe $H_n(\Delta^n_\alpha, \partial\Delta^n_\alpha)$ durch die die Identität id_{Δ^n} gegeben. Somit ist $H_n(X^k, X^{k-1})$ gleich 0, falls $k \neq n$ und gleich der direkten Summe von Kopien von $\mathbb{Z}$ parametrisiert über die charakteristischen Abbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \to X$ mit $n(\alpha) = n$, falls $n = k$. Außerdem ist ein Erzeuger der α-ten Kopie von $\mathbb{Z}$ durch die charakteristische Abbildung σ_α gegeben. Damit ist der erste und vierte senkrechte Pfeil im obigen Diagramm auch ein Isomorphismus und die Aussagee des Satzes folgt (für endlichdimensionales X) durch Induktion nach k.

Falls X unendlichdimensional ist, benutzen wir die Tatsache, dass das Bild jedes singulären Simplex in X in einem X^k enthalten ist, denn dieses Bild ist kompakt und kann daher überhaupt nur endlich viele offene Simplizes in X treffen (siehe Hatcher, S. 130). Daraus kann man die Injektivität und Surjektivität der Abbildung $H_n^{\Delta}(X) \to H_n(X)$ aus den bereits bewiesenen Tatsachen ableiten. Der Fall $A \neq \emptyset$ folgt mit einem Fünferlemmaargument aus dem absoluten Fall. Damit ist Satz 8.1 bewiesen.

9. Euler-Charakteristik und Lefschetzscher Fixpunktsatz

Es sei X ein topologischer Raum, $n \geq 0$ und $H_n(X)$ sei eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn X ein endlicher Δ-Komplex ist. Wir definieren die n-te *Bettizahl* von X als den Rang $\operatorname{rk} H_n(X)$ der endlich erzeugten abelschen Gruppe $H_n(X)$ (dies ist die Anzahl der Elemente einer beliebigen Basis der endlich erzeugten freien abelschen Gruppe $H_n(X)/\mathrm{Tor}\,\mathrm{H_n(X)}$ oder auch gleich der Anzahl der $\mathbb{Z}$-Summanden, wenn wir $H_n(X)$ als direkte Summe von zyklischen Gruppen schreiben). Die n-te Bettizahl von X wird mit $b_n(X)$ oder auch nur mit b_n bezeichnet.

Definition. Es sei X ein endlicher Δ-Komplex. Für $n \geq 0$ sei c_n die Anzahl der n-Simplizes in X. Dann ist die *Eulercharakteristik* von X definiert als

$$\chi(X) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \,.$$

Ist X ein endlicher zweidimensionaler Simplizialkomplex (oder allgemeiner Δ-Komplex), so ist also

$$\chi(X) = e - k + f \,,$$

die Wechselsumme der Anzahl e der Ecken, k der Kanten und f der Flächen in X. Wir wollen zeigen, dass $\chi(X)$ nur von der Homologie von X abhängt:

Satz 9.1. *Es gilt*

$$\chi(X) = \sum (-1)^n b_n(X) \,.$$

Proof. Der Beweis beruht auf der folgenden rein algebraischen Tatsache: Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von endlich erzeugten abelschen Gruppen, so gilt

$$\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} C \,.$$

Wir setzen dazu $A' = A/\mathrm{TorA}$, etc. und betrachten die induzierte Sequenz

$$0 \to A' \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{g} C' \to 0\,.$$

Diese ist im allgmeinen nicht exakt (z.b. falls man mit $0 \xrightarrow{x\mapsto 2x} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$ startet). Man überlegt sich aber leicht:

- f ist injektiv,
- g ist surjektiv,
- $\ker g/\mathrm{im}\, f$ ist eine Torsionsgruppe.

Es sei $\phi : C' \to B'$ ein Split von g, d.h. $\phi \circ g = \mathrm{id}_{C'}$. Die Abbildung ϕ existiert, da C' frei ist. Dann ist $\mathrm{im}\, f \cap \mathrm{im}\, \phi = 0$ und $B'/(\mathrm{im}\, f \oplus \mathrm{im}\, \phi)$ eine Torsionsgruppe, wie man sich mit dem vorher Gesagten überlegt. Daraus folgt

$$\mathrm{rk}\, B = \mathrm{rk}\, B' = \mathrm{rk}(\mathrm{im}\, f \oplus \mathrm{im}\, \phi) = \mathrm{rk}\, A' + \mathrm{rk}\, C' = \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, C\,.$$

Für den Beweis von Theorem 9.1 betrachten wir einen beliebigen Kettenkomplex

$$0 \to C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \to \ldots \to C_1 \to C_0 \to 0$$

bestehend aus endlich erzeugten abelschen Gruppen. Wir erhalten die Gruppen der n-Zykeln Z_n, der n-Ränder B_n und der n-ten Homologie $H_n = Z_n/B_n$ für alle n. Wir haben damit kurze exakte Sequenzen

$$0 \to Z_n \to C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0$$
$$0 \to B_n \hookrightarrow Z_n \to H_n \to 0\,.$$

Mit dem eben Gezeigten gilt also $\mathrm{rk}\, C_n = \mathrm{rk}\, Z_n + \mathrm{rk}\, B_{n-1}$ und $\mathrm{rk}\, Z_n = \mathrm{rk}\, B_n + \mathrm{rk}\, H_n$. Wir setzen die zweite Gleichung in die erste ein, Multiplizieren mit $(-1)^n$ und addieren über n. Die resultierende Gleichung $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, \mathrm{rk}\, C_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, \mathrm{rk}\, H_n$ ist gerade die Behauptung. $\square$

Beispiel. $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$, $\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$, $\chi(\mathbb{R}P^n) = 1$, falls n gerade und $\chi(\mathbb{R}P^n) = 0$, falls n ungerade.

Es sei $g \geq 1$. Die *orientierte Fläche vom Geschlecht* g, Σ_g, ist der Quotientenraum eines regelmäßigen $4g$-Ecks im $\mathbb{R}^2$ nach Verklebung der Randsegmente die sich durch die Bezeichungen $\alpha_1, \beta_1, \alpha_1^{-1}, \beta_1^{-1}, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_k^{-1}, \beta_k^{-1}$ der Randsegemente ergeben, wenn wir den Rand des $4g$-Ecks einmal durchlaufen. Wir setzen noch $\Sigma_0 = S^2$. Man kann sich Σ_g als eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit g „Löchern“ vorstellen.

Man sieht durch direktes Abzählen der Simplizes in einer Zerlegung von Σ_g als Δ-Komplex

$$\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g\,.$$

Insbesondere werden die Flächen Σ_g durch ihre Eulercharakteristik unterschieden.

Eng verwandt mit der Eulercharakteristik ist die sogenannte *Lefschetzzahl*. Es sei dazu X ein endlicher Simplizialkomplex und $f : X \to X$ eine stetige Abbildung (wir schreiben hier auch X für die geometrische Realisierung von X). Dann ist für alle $n \geq 0$ die Abbildung $f_n : H_n(X;\mathbb{Z}) \to H_n(X;\mathbb{Z})$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten abelschen Gruppen. Wir erhalten somit eine induzierte Abbildung $f_n : H_n(X)/\mathrm{Tor} \to \mathrm{H_n(X)/Tor}$ von endlich erzeugten freien abelschen Gruppen. Stellen wir diese Abbildung nach Wahl einer Basis durch eine Matrix dar, erhalten wir durch Aufsummieren der Diagonalelemente die Spur $\mathrm{tr}(f_n)$. Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Wir setzen

$$L(f) := \sum (-1)^n \mathrm{tr}(f_n) \in \mathbb{Z}\,.$$

Dies ist die *Lefschetzzahl* von f. Falls $f = \mathrm{id}$, gilt also $L(f) = \chi(X)$. Falls $f : X \to X$ nullhomotop ist, so gilt $L(f) = 1$ (denn f faktorisiert durch den einpunktigen Raum).

Der folgende Satz ist eine weitreichende Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

Satz 9.2 (Lefschetzscher Fixpunktsatz)**.** *Falls $L(f) \neq 0$, so gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = x$.*

Für den Beweis dieser Tatsache verweisen wir auf den entsprechenden Abschnitt im Hatcher, S. 179 f. Wir geben hier nur eine Beweisskizze.

Angenommen, $f : X \to X$ ist nicht nur stetig, sondern eine simpliziale Abbildung. Wir erhalten dann eine induzierte Abbildung von simplizialen Kettenkomplexen

$$f_* : C_*^{simpl}(X) \to C_*^{simpl}(X)$$

Da X ein endlicher Simplizialkomplex ist, definiert f_* in jedem Grad einen Endomorphismus einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe. Wir erhalten damit wieder die Wechselsumme

$$\widetilde{L}(f) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{tr}(f_n) \in \mathbb{Z}$$

Man zeigt nun, ganz ähnlich wie beim Beweis von Theorem 9.1, dass

$$\widetilde{L}(f) = L(f)\,.$$

Wir betrachten nun eine stetige Abbildung $f : X \to X$ ohne Fixpunkte. Wir wählen eine Metrik d auf X (z.B. indem wir X in einen Euklidischen Raum einbetten und die induzierte Metrik nehmen).

Man kann zeigen („Satz von der simplizialen Approximation“), dass wir f zu einer simplizialen Abbildung $g : K \to L$ homotopieren können, wenn wir von X zu iterierten baryzentrischen Unterteilungen K und L von X übergehen. Für vorgegebenes $\epsilon > 0$ können wir dabei durch genügend feine Unterteilung erreichen, dass $\|f - g\| < \epsilon$. Hier benutzen wir die Maximumsnorm bezüglich der gewählten Metrik auf X.

Da X kompakt ist und f keinen Fixpunkt hat, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $d(x, f(x)) \geq 2\epsilon$ für alle $x \in X$. Wir wählen $g : K \to L$ wie gerade beschrieben. Dann hat g ebenfalls keine Fixpunkte.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass hier $K = L$ gilt. Dies ist nicht immer der Fall, aber die Idee des Beweises lässt sich an diesem Spezialfall gut veranschaulichen. Das präzise Argument findet sich im Hatcher.

Da g simplizial ist und keine Fixpunkte hat, gilt $g(\sigma) \neq \sigma$ für alle $\sigma \in K$, denn wäre $g(\sigma) = \sigma$, so wäre $g|_\sigma : \sigma \to \sigma$ ein affiner Selbsthomöomorphismus und hätte somit einen Fixpunkt.

Daraus folgt direkt aus der Definition von $\widetilde{L}$

$$\widetilde{L}(\widetilde{f}) = 0$$

Nach der anfänglichen Bemerkung impliziert dies $L(\widetilde{f}) = 0$ und somit wegen $f \simeq \widetilde{f}$

$$L(f) = L(\widetilde{f}) = 0\,.$$

Dies war zu zeigen.

Korollar 9.3. *Aus dem Lefschetzschen Fixpunktsatz folgert man leicht den Brouwerschen Fixpunktsatz. Eine andere Folgerung ist, dass jede Selbstabbildung $\mathbb{R}P^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ einen Fixpunkt hat (hier braucht man natürlich die Homologie von $\mathbb{R}P^{2n}$ - diese kann man im Hatcher nachschlagen, oder selbst ausrechnen).*

Wir können die Lefschetzzahl auch heranziehen, um einen Beweis des Satzes von Dold 5.7 zu skizzieren (eine präzise Diskussion erfordert wieder weitergehende technische Hilfsmittel)

Satz 9.4. *Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und G eine endliche Gruppe mit mindestens 2 Elementen. Dann gibt es keine G-äquivariant Abbildung $f : E_nG \to E_{n-1}G$. Insbesondere ist*

$$\mathrm{ind}_G\, E_nG = n\,.$$

Für unsere Anwendung auf den topologischen Tverberg-Satz ist es ausreichend, den Fall zu behandeln, dass E_nG ein endlicher Simplizialkomplex ist.

Da E_nG $(n-1)$-zusammenhängend ist, existiert eine G-Abbildung $\phi : E_{n-1}G \to E_nG$. Komposition mit f führt auf eine G-Abbildung $g : E_nG \to E_{n-1}G \xrightarrow{\phi} E_nG$.

Wir nehmen nun an, das g simplizial ist. Dann folgt aus der G-Äquivarianz von g, dass $\widetilde{L}(g)$ durch $|G|$ teilbar ist. Diese Folgerung kann man auch für allgemeines g ziehen, aber das ist etwas komplizierter zu zeigen.

Andererseits ist E_nG $(n-1)$-zusammenhängend, insbesondere ist jede Abbildung eines $(n-1)$-dimensionalen Simplizialkomplexes (z.B. $E_{n-1}G$) nach E_nG (nicht-äquivariant) nullhomotop. Daraus folgt, dass g (nicht-äquivariant) nullhomotop ist und somit $L(g) = 1$. Widerspruch.