Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Projektive Geometrie SS 2016

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS16

Lösungen zu Aufgabenblatt 11 (2016-06-30)

— ***Präsenzaufgaben***—

Aufgabe 1. Projektivspiegelung

In dieser Aufgabe sollen euklidische Spiegelungstransformationen auf andere Geometrien verallgemeinert werden.

a) Auf der projektiven Geraden $\mathbb{RP}^1$ seien die Punkte ∞, a und $(a+b)$ vorgegeben. Wie können Sie den Punkt $(a-b)$ konstruieren, also quasi das Spiegelbild von $(a+b)$ an a?

b) Das Spiegelbild P' eines Punktes P an einer Geraden g kann in der euklidischen Ebene mit den folgenden Schritten konstruiert werden:

1. Man bestimme die Gerade h, die senkrecht auf g steht und durch P verläuft.
2. Man bestimme denjenigen Punkt P' auf h, der vom Schnitt dieser beiden Geraden gleich weit weg ist wie P, aber auf der anderen Seite liegt.

Konkretisieren Sie diese Konstruktionsbeschreibung so, dass klar wird, *wie* diese Schritte jeweils zu erreichen sind. Beschränken Sie sich dabei auf Werkzeuge, die sich auf andere Geometrien übertragen lassen: Schnittpunkt, Verbindungsgerade, harmonische Lage sowie Tangente, Polare und Pol bezüglich des Fundamentalgebildes. Nehmen Sie außer durch die drei letztgenannten Operationen keinerlei Bezug auf das Fundamentalgebilde.

c) Überlegen Sie sich eine entsprechende Konstruktionsmethode, mit der eine Punktspiegelung konstruiert werden kann. Verwenden Sie dabei wieder nur den in der vorangegangenen Teilaufgabe beschriebenen Satz von Werkzeugen.

d) Beschreiben Sie eine allgemeine Klasse von Transformationen (im Folgenden als „Projektivspiegelungen“ bezeichnet), die euklidische Spiegelungen an einer Gerade sowie an einem Punkt als Spezialfälle enthält. Jedes Element dieser Klasse soll durch einen Punkt und eine Gerade beschrieben werden, und die Transformationen dieser Klasse sollen keinen Bezug mehr auf irgendwelche Fundamentalgebilde nehmen.

e) Begründen Sie kurz, warum jede Projektivspiegelung eine Involution ist, warum also die doppelte Ausführung wieder die Identität darstellt.

f) Durch wie viele Paare aus Urbild- und Bild-Punkten wird eine Projektivspiegelung im Allgemeinen eindeutig definiert?

g) Zeigen Sie, dass jede Projektivspiegelung eine projektive Transformation ist.

h) Welche Bedingung muss für den Punkt und die Gerade mit Bezug auf das Fundamentalgebilde $\mathcal{K}$ gelten, damit man die Abbildung als Spiegelungen im engeren Sinne einer konkreten Geometrie auffassen kann? Wählen Sie Ihre Einschränkung so, dass dadurch in der euklidischen Ebene lediglich Achs- und Punktspiegelung zugelassen werden. Orientieren Sie sich bei Ihrer algebraischen Formalisierung an der Definition von Primal-Dual-Paaren. Eine Projektivspiegelung, die diese Einschränkung erfüllt, soll im folgenden als „$\mathcal{K}$-Spiegelung“ bezeichnet werden.

i) Beschreiben Sie, was eine $\mathcal{K}$-Spiegelung in hyperbolischer Geometrie ist. Lassen sich auch in der hyperbolischen Symmetrie sowohl Achs- als auch Punktspiegelungen auf diese Weise darstellen?

j) Untersuchen Sie auch, welche Situation sich für eine $\mathcal{K}$-Spiegelung in elliptischer Geometrie ergibt. Stellen Sie sich diese Geometrie auf der Kugel vor. Wie sieht es dort mit der Unterscheidung zwischen Achs- und Punktspiegelungen aus?

k) Beweisen Sie zumindest für hyperbolische Geometrie, dass dort jede $\mathcal{K}$-Spiegelung Längen und Winkel erhält. Auf welche anderen Geometrien lässt sich dieser Beweis verallgemeinern?

LÖSUNG:

a) Es gilt $(a, \infty; a+b, a-b) = -1$. Man kann also eine Standard-Konstruktion für harmonische Lage ausführen.

b) Eine Achsspiegelung kann man so beschreiben:

   (a) $Q = Bg$, der Pol der Spiegelachse
   (b) $h = Q \vee P$
   (c) $M = g \wedge h$
   (d) $(P, P'; M, Q) = -1$ auf h

   Der Pol einer Geraden ist der Punkt, durch den alle Senkrechten verlaufen. In euklidischer Geometrie kann man sich das auch leicht anhand der Matrixmultiplikation überlegen.

c) Hier sei (aus Gründen der Einheitlichkeit, was in späteren Aufgaben noch von Nutze sein wird) Q der Punkt, an dem gespiegelt wird. Es gibt mehrere Ansätze, eine Punktspiegelung zu formulieren, etwa indem man sie in eine Achsspiegelung übersetzt. Für die weitere Bearbeitung ist jedoch die folgende Formulierung am nützlichsten:

   (a) $g = AQ$, die Polare zu Q
   (b) $h = Q \vee P$
   (c) $M = g \wedge h$
   (d) $(P, P'; M, Q) = -1$ auf h

   In euklidischer Geometrie ist die Polare jedes endlichen Punktes die Ferngerade. Von daher ist g einfach die Ferngerade, und M der Fernpunkt der Geraden h. Man hätte also auch AP statt AQ rechnen können, was sich jedoch schlechter verallgemeinern lässt.

d) Ausgehend von einem Punkt Q und einer Geraden g verfährt man wie folgt:

   (a) $h = Q \vee P$
   (b) $M = g \vee h$
   (c) $(P, P'; M, Q) = -1$

   Wenn g eine endliche Gerade und Q der orthogonale Fernpunkt ist, erhält man eine euklidische Achsspiegelung. Wenn Q ein endlicher Punkt und g die Ferngerade ist, ergibt sich eine Punktspiegelung. Dank der einheitlich (wenngleich vielleicht unintuitiv) gewählten Bezeichnungen zuvor entspricht diese Konstruktion genau den Schritten 2 bis 4 der beiden vorangegangenen Teilaufgaben.

e) Da Q, P und P' alle auf h liegen, erhält man diese Gerade sowohl durch $Q \vee P$ als auch durch $Q \vee P'$. M bleibt damit auch gleich, wenn man P und P' vertauscht. Und da auch die harmonische Lage invariant ist unter Vertauschungen in einem Paar, ist die gesamte Konstruktion symmetrisch bezüglich Vertauschung von P und P', so dass das Bild des Bildes wieder der Ausgangspunkt sein muss.

f) Es genügen im Allgemeinen zwei Paare, etwa $P_1 \mapsto P_1'$ und $P_2 \mapsto P_2'$. Man erhält $Q = (P_1 \vee P_1') \wedge (P_2 \vee P_2')$. Damit kann man auf beiden Geraden M_i konstruieren durch $(P_i, P_i'; M_i, Q)$. Daraus wiederum ergibt sich $g = M_1 \vee M_2$.

g) Die euklidische Achsspiegelung, etwa an der x-Achse, ist bekanntlich als Matrixmultiplikation (mit einer Matrix S) darzustellen, und somit eine projektive Transformation. Jede Instanz einer Projektivspiegelung lässt sich über eine projektive Transformation T auf die Situation dieser Achsspiegelung zurückführen: man kann immer g auf die x-Achse und Q auf den Punkt $(0, 1, 0)^T$ abbilden. Da die Projektivspiegelung von ihrer Konstruktion her nur Inzidenzgeometrie verwendet, ist sie projektiv invariant. Man kann daher jede Projektivspiegelung als Multiplikation mit einer Matrix $T^{-1} \cdot S \cdot T$ schreiben, also als projektive Transformation.

h) Q und g müssen Pol und Polare zu einander sein. Im Falle eines degenerierten Fundamentalgebildes ist dieser Zusammenhang jedoch nicht immer eindeutog definiert. Wir definieren also, dass (Q, g) ein Pol-Polare-Paar bilden, genau dann wenn

   $$AQ = \lambda g \qquad\qquad Bg = \mu Q$$

   Im Falle eines degenerierten Fundamentalgebildes ist λ oder μ (oder gar beide) 0.

i) In hyperbolischer Geometrie sind Achs- und Punktspiegelung sehr ähnlich, wenn man den gesamten $\mathbb{RP}^2$ betrachtet. Wenn die Gerade den Kegelschnitt schneidet, liegt ihr Pol außerhalb, und für das Innere des Kegelschnitts ergibt sich eine Achsspiegelung. Wenn der Punkt im Kegelschnitt liegt, ist die Polare komplett außerhalb, und im Inneren erscheint dies als Punktspiegelung.

j) In elliptischer Geometrie fallen die beiden Konzepte komplett zusammen. Der elliptische Pol zum Äquator einer Kugel ist repräsentiert durch Nor- und Südpol, die als antipodale Punkte ja identifiziert werden. Analog für andere Großkreise. Eine Drehung um 180° um einen solchen Pol entspricht genau einer Spiegelung an dem Großkreis, da ja auch P und P' jeweils durch antipodale Punktepaare auf der Kugel repräsentiert werden.

k) Um zu zeigen, dass Längen und Winkel erhalten bleiben, muss man beweisen, dass der Kegelschnitt unter Projektivspiegelungen invariant bleibt. Dafür stellt man sich am besten hyperbolische Geometrie am Einheitskreis vor. Auch wenn sich die nachfolgenden Überlegungen reell am besten vorstellen lassen, funktionieren sie genau so gut, wenn Zwischenergebnisse komplex werden.

   Die Gerade g schneidet $\mathcal{K}$ in X und Y. Die Tangenten x und y in diesen Punkten schneiden sich in M. Eine andere Gerade h schneidet g in Q sowie $\mathcal{K}$ in zwei Punkten, P und P'. Dabei ist noch zu beweisen, dass tatsächlich $(P, P'; M, Q) = -1$ gilt.

   Die Konstruktion so weit ist aus der Vorlesung bekannt, aus dem Kontext rund um Hesses Übertragungsprinzip. Sie weist nach, dass $(P, P'; X, Y)_{\mathcal{K}} = -1$ ist. Damit gilt

$$\begin{aligned}
-1 &= \lim_{Z\to Y} (P, P'; X, Y)_Z \\
&= (Y \vee P, Y \vee P'; Y \vee X, AY) = (Y \vee P, Y \vee P'; Y \vee M, Y \vee Q) \\
&= (P, P'; M, Q)_Y = (P, P'; M, Q)
\end{aligned}$$

   Folglich ist P' tatsächlich das Bild von P unter der $\mathcal{K}$-Spiegelung. Punkte des Fundamentalgebildes werden also wieder auf Punkte des Fundamentalgebildes abgebildet, weshalb es sich um echte $\mathcal{K}$-Bewegungen handelt.

— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 2. Winkelhalbierende

In dieser Aufgabe soll bewiesen werden, dass sich die Winkelhalbierenden im Dreieck in einer Cayley-Klein-Geometrie in einem Punkt schneiden. Sie dürfen davon ausgehen, dass dieses Dreieck nicht-degeneriert ist, dass die drei Eckpunkte also nicht kollinear sind.

Hinweis: Diese Fragestellung wurde auch in der Vorlesung behandelt. Versuchen Sie jedoch, die durch die Teilaufgaben angeleitete Argumentation nachzuvollziehen, unterstützt von dem was Sie von der Vorlesung im Kopf haben. Einfach den Beweis aus der Vorlesung anschauen und abzuschreiben bringt nichts.

a) Wie viele Möglichkeiten haben Sie, zu einem Paar von Geraden in euklidischer Geometrie eine Winkelhalbierende zu konstruieren?

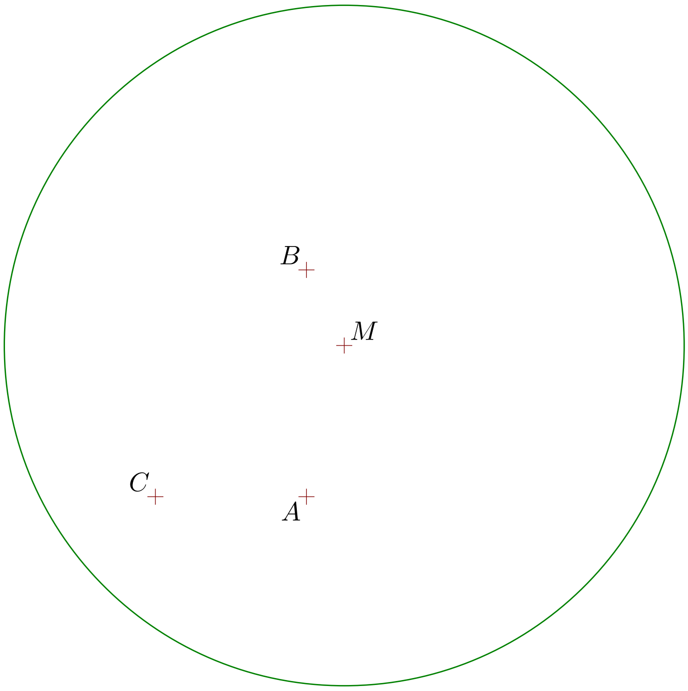
b) Zeichnen Sie ein hinreichend allgemeines Dreieck, und zeichnen Sie alle euklidischen Winkelhalbierenden zwischen Kanten ein, die an den Ecken auftreten. Wie viele von den Ecken verschiedene Punkte gibt es, durch die mehr als eine Winkelhalbierende verläuft, und wie viele Winkelhalbierende schneiden sich dort jeweils?

c) Gegeben seien zwei Geraden, die sich im Mittelpunkt eines Kreises schneiden. Beschreiben Sie, wie eine (euklidische) Winkelhalbierende konstruiert werden kann, und zwar ausschließlich unter Verwendung von Tangenten, Schnittpunkten und Verbindungsgeraden. Nutzen Sie dazu Symmetrien aus.

d) Gegeben seien zwei Geraden, die sich irgendwo im Inneren des fundamentalen Kegelschnitts schneiden. Beschreiben Sie eine Konstruktion, mit der eine hyperbolische Winkelhalbierende zu diesen beiden Geraden konstruiert werden kann.

e) Formulieren Sie Ihre Konstruktionsbeschreibung so um, dass in keinem Konstruktionsschritt der Schnittpunkt der beiden ursprünglichen Geraden verwendet wird.

f) In der folgenden Abbildung ist das Fundamentalgebilde der hyperbolischen Geometrie ein Kreis mit Mittelpunkt M. Konstruieren Sie (mit Geodreieck und ggf. Zirkel) in der folgenden Abbildung die drei Innenwinkelhalbierenden des Dreiecks ABC, also jeweils die Winkelhalbierende, die durch das Innere des Dreiecks verläuft.



g) Überprüfen Sie, dass sich diese diese drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden.

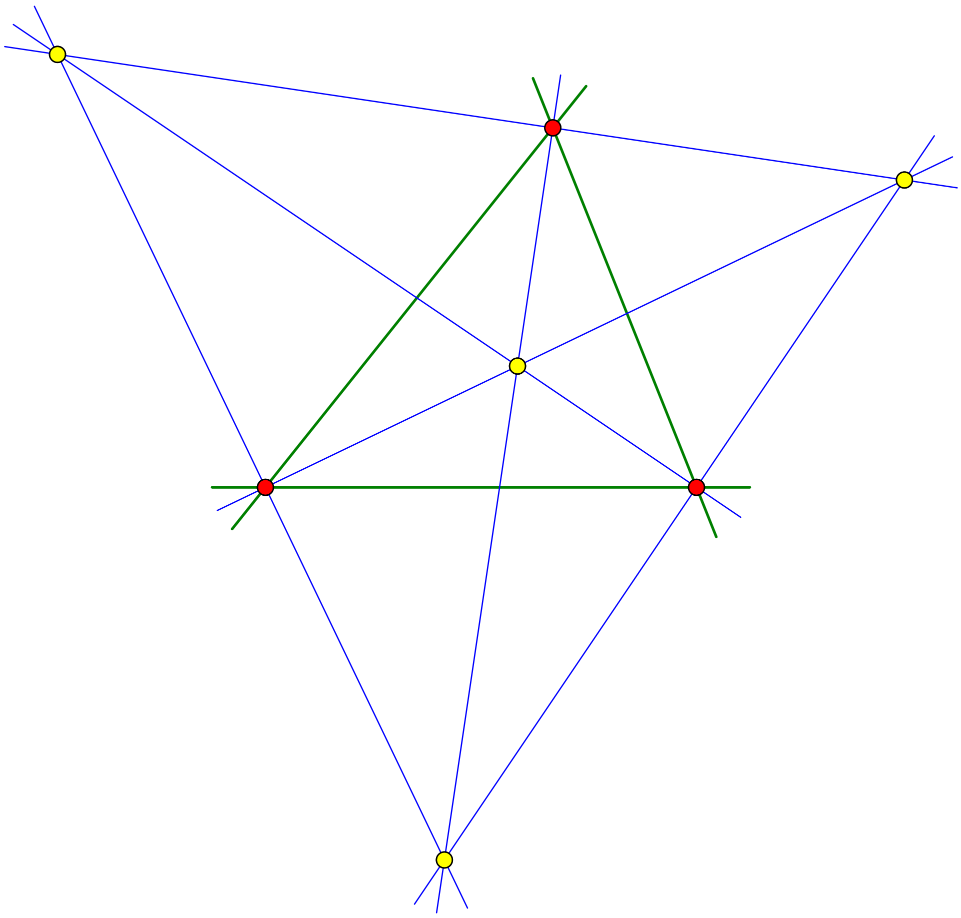
h) Beweisen Sie, warum sich diese Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden müssen. Erinnern Sie sich dabei an einen Satz, der sechs Tangenten an einen Kegelschnitt in seinen Voraussetzungen enthält. Wenn Ihnen kein solcher Satz einfällt, hilft vielleicht Dualisieren, um sich diesen wieder herzuleiten.

i) In welchem Umfang lässt sich diese Konstruktion der Winkelhalbierenden auf andere Geometrien übertragen? Ist der Beweis dann ebenfalls noch anwendbar?

<u>Lösung:</u>

a) Es gibt zwei Möglichkeiten.

b) Es gibt vier Schnittpunkte von jeweils drei Winkelhalbierenden. In einem schneiden sich die drei inneren Winkelhalbierenden, an den anderen sind je zwei äußere und eine innere Winkelhalbierende beteiligt.

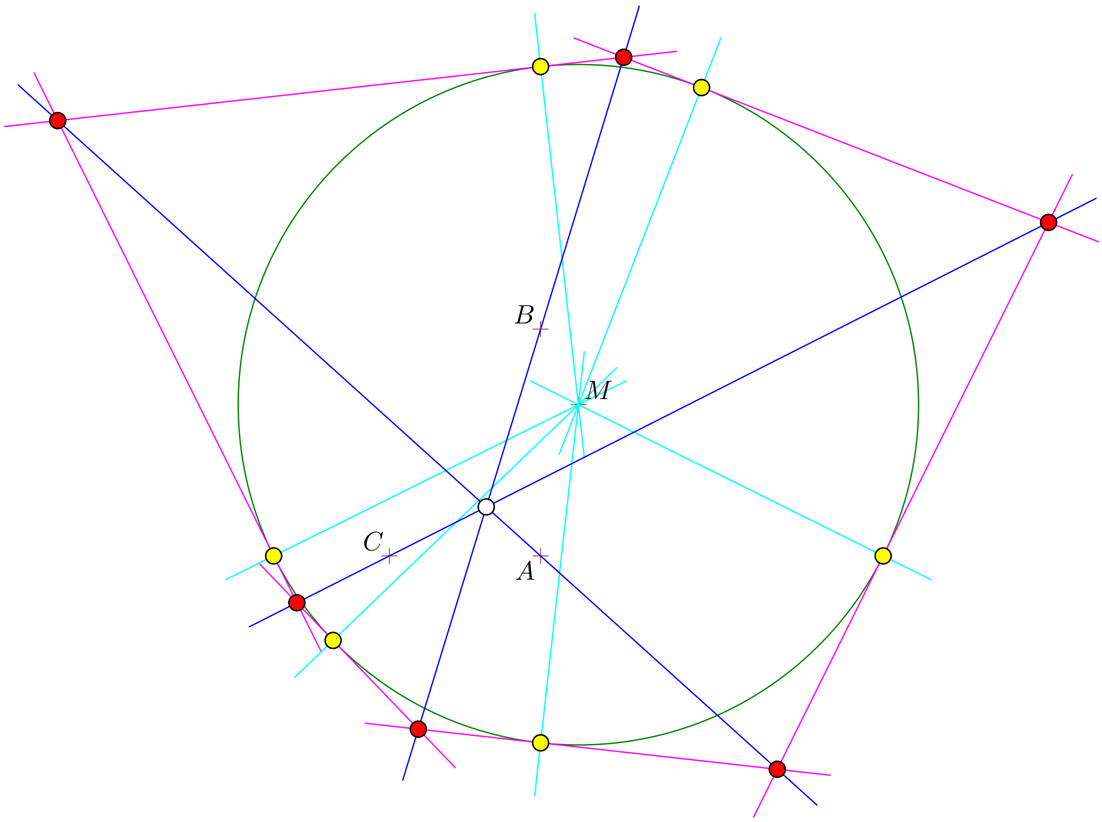


c) Man nehme von jeder Geraden jeweils einen Schnittpunkt mit dem Kreis, lege in diesen Punkten Tangenten an den Kreis, und verbinde deren Schnittpunkt mit dem Schnittpunkt der ursprünglichen Geraden.

d) Da im Zentrum des Kreises euklidische und hyperbolische Winkel übereinstimmen, stimmt dort auch die Konstruktion überein. Da die Konstruktion projektiv invariant ist, und sich jeder Punkt durch eine hyperbolische Transformation in den Mittelpunkt verschieben lässt, ist die gleiche Konstruktion für jeden Punkt anwendbar, um eine hyperbolische Winkelhalbierende zu erhalten.

e) Nimmt man, ausgehend von zwei Geraden, auch noch das andere Paar von Schnittpunkten mit dem Fundamentalgebilde, und schneidet auch die dazu gehörenden Tangenten, so liegt auch deren Schnitt auf der gleichen Winkelhalbierenden. Man kann diese Winkelhalbierende also auch als Verbindung zweier Tangentenschnittpunkte beschreiben.

f) Die fertige Konstruktion sieht in etwa so aus. Den Mittelpunkt des Kreises kann man zum Einzeichnen der Tangenten verwenden, da diese auf den Radien senkrecht stehen.



g) Stimmt, wie in der Abbildung zu erkennen ist.

h) Die Konstruktion entspricht dem Satz von Brianchon, also dem dualisierten Satz von Pascal.

i) In Elliptischer Geometrie wären Zwischenschritte komplex, so dass die Konstruktion nur mit komplexen Werkzeugen durchführbar wäre. Der Beweis hat jedoch Bestand, da die algebraischen Zusammenhänge die gleichen sind. Für andere Geometrien scheitert die Konstruktion daran, dass aufgrund der Degeneriertheit Objekte zusammenfallen und daraus abgeleitete Objekte damit nicht mehr definiert sind.