



— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 1. Moulton-Ebene

Die sogenannte Moulton-Ebene ist eine affine Ebene, in der der Satz von Desargues nicht gilt. Ihr projektiver Abschluss lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathcal{I} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + by + cz = 0 & \text{falls } x \cdot z > 0 \text{ und } a \cdot b > 0 \\ ax + by + cz = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Überprüfen Sie, dass die Sonderbehandlung in der Inzidenzrelation \mathcal{I} nur endliche Punkte rechts der y -Achse sowie endliche Geraden mit endlicher negativer Steigung betrifft.
- Zeigen Sie, dass die Inzidenzrelation wohldefiniert ist.
- Machen Sie sich ein anschauliches Bild dieser Ebene.
- Formulieren Sie Verfahren, wie Sie Verbindungsgeraden und Schnittpunkte bestimmen können.
- Argumentieren Sie, dass diese projektive Moulton-Ebene alle Axiome für eine projektive Ebene erfüllt.
- Fertigen Sie eine Konstruktion an, die belegt, dass der Satz von Pappos in dieser Ebene nicht allgemeingültig ist.
- Fertigen Sie eine Konstruktion an, die belegt, dass der Satz von Desargues in dieser Ebene nicht allgemeingültig ist.

LÖSUNG:

- Für Punkte kann man so argumentieren:

$$\begin{aligned} x \cdot z > 0 &\Rightarrow x \cdot z \neq 0 \Rightarrow z \neq 0 \Rightarrow \text{endlich} \\ x \cdot z > 0 &\Rightarrow \frac{x}{z} > 0 \Rightarrow x' > 0 \end{aligned}$$

wobei x' die x -Koordinate des dehomogenisierten Punktes sei.

Für Geraden formt man am besten die Geradengleichung um:

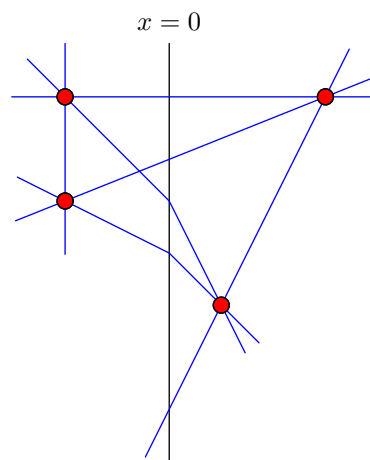
$$\begin{aligned} 0 &= ax + by + c \\ by &= -(ax + c) \\ y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ a \cdot b > 0 &\Rightarrow a \cdot b \neq 0 \Rightarrow b \neq 0 \\ a \cdot b > 0 &\Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow -\frac{a}{b} < 0 \end{aligned}$$

b) Unter Wohldefiniertheit ist hier wieder die Unabhängigkeit vom Repräsentanten zu verstehen, also

$$\begin{aligned}
 p\mathcal{I} &\Leftrightarrow (\lambda p)\mathcal{I}(\mu l) \\
 x \cdot z > 0 &\Leftrightarrow \lambda x \cdot \lambda z = \lambda^2(x \cdot z) > 0 \\
 a \cdot b > 0 &\Leftrightarrow \mu a \cdot \mu b = \mu^2(a \cdot b) > 0 \\
 a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = 0 &\Leftrightarrow \mu a \cdot \lambda x + \mu b \cdot \lambda y + \mu c \cdot \lambda z = \mu\lambda(a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z) = 0 \\
 2 \cdot a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = 0 &\Leftrightarrow 2 \cdot \mu a \cdot \lambda x + \mu b \cdot \lambda y + \mu c \cdot \lambda z = \mu\lambda(2 \cdot a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z) = 0
 \end{aligned}$$

Wichtig ist hier, dass Quadrate reeller Zahlen immer positiv sind. Sowohl die Fallunterscheidungen selbst als auch die Berechnungen in jedem einzelnen Fall sind also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

c) Am besten denkt man sich die Punkte der MOULTON-Ebene als Punkte der normalen projektiven Ebene, und stellt sich dann die Geraden als die Menge der dazu inzidenten Punkte dar. Geraden mit nicht-negativer Steigung verhalten sich dabei ganz normal, sprich haben die gleichen inzidenten Punkte, wie sie in \mathbb{RP}^2 hätten. Das gilt auch für senkrechte Geraden, also bei unendlicher Steigung. Geraden mit endlicher negativer Steigung erfahren beim Kreuzen der y -Achse einen Knick: rechts davon ist die Steigung um den Faktor 2 größer als links. Das folgende Bild veranschaulicht vier Punkte und alle dazwischen auftretenden Verbindungsgeraden.



d) Zunächst der Algorithmus zur Bestimmung einer Verbindungsgerade zwischen $p_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ und $p_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$. Dazu ermittelt man zunächst eine Hilfsgerade $(a', b', c')^T := p_1 \times p_2$. Wenn diese Hilfsgerade endliche negative Steigung hat, also $a' \cdot b' > 0$ ist, dann muss man die Punkte rechts der y -Achse so verschieben, wie sie ohne Knick in den Geraden liegen würden, sprich wenn die Gerade rechts der y -Achse die gleiche Steigung hätte, wie sie links der Achse hat.

$$\begin{aligned}
 x'_1 &:= \begin{cases} 2x_1 & \text{falls } a' \cdot b' > 0 \text{ und } x_1 \cdot z_1 > 0 \\ x_1 & \text{sonst} \end{cases} \\
 x'_2 &:= \begin{cases} 2x_2 & \text{falls } a' \cdot b' > 0 \text{ und } x_2 \cdot z_2 > 0 \\ x_2 & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dann erhält man aus $p'_1 := (x'_1, y_1, z_1)$ und $p'_2 := (x'_2, y_2, z_2)$ die Verbindungsgerade $p_1 \vee p_2 := p'_1 \times p'_2$.

Der gleiche Ansatz funktioniert auch für Schnittpunkte: zunächst rechnet man den Schnittpunkt ohne Knick aus, und falls dieser rechts der y -Achse liegt, werden diejenigen Geraden mit negativer Steigung auf ihre geknickte Variante umgeschrieben.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &:= l_1 \times l_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \\
 a'_i &:= \begin{cases} 2a_i & \text{falls } x' \cdot z' > 0 \text{ und } a_i \cdot b_i > 0 \\ a_i & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i \in \{1, 2\} \\
 l_1 \wedge l_2 &:= \begin{pmatrix} a'_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a'_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die angegebenen Berechnungen ergeben jeweils nur dann den Null-Vektor, wenn die Eingabepunkte linear abhängig sind. Sprich zu unterschiedlichen Eingabeobjekten ist das Resultat immer als geometrisches Objekt zu interpretieren.

- e) Die Verfahren, wie sie gerade angegeben wurden, führen jeweils zu einem eindeutigen Ergebnis. In diesem Sinne ist Schnitt und Verbindungsgerade bereits eindeutig definiert. Streng genommen ist damit aber nur Existenz garantiert. Es wäre noch denkbar, dass es noch weitere Objekte gibt, die der Algorithmus nicht findet, die aber dennoch die erforderlichen Inzidenzeigenschaften aufweisen.

Sowohl der Fall mit zwei unterschiedlichen Verbindungsgeraden zu zwei vorgegebenen Punkten als auch der Fall mit zwei unterschiedlichen Schnittpunkten zu zwei vorgegebenen Geraden lässt sich äquivalent formulieren und diskutieren: Angenommen es existieren

$$p_1, p_2 \in \mathcal{P}; \quad l_1, l_2 \in \mathcal{L} \quad \text{so dass} \quad p_1 \mathcal{I} l_1, p_1 \mathcal{I} l_2, p_2 \mathcal{I} l_1, p_2 \mathcal{I} l_2$$

Um diese Möglichkeit zu widerlegen, bietet sich eine Fallunterscheidung an. Dabei sei o.B.d.A. $x_1 z_1 \leq x_2 z_2$ und $a_1 b_1 \leq a_2 b_2$.

- Fall 1: $x_1 z_1 \leq x_2 z_2 \leq 0$. Beide Punkte „links“. Keine Sonderbehandlung, sondern normale Geradengleichungen. Daher gelten Eigenschaften von \mathbb{RP}^2 , und es können nicht alle vier Inzidenzen gleichzeitig auftreten.
- Fall 2: $a_1 b_1 \leq a_2 b_2 \leq 0$. Beide Geraden mit nicht-negativer Steigung. Keine Sonderbehandlung, sondern normale Geradengleichung.
- Fall 3: $0 < x_1 z_1 \leq x_2 z_2$; $0 < a_1 b_1 \leq a_2 b_2$. Nur Sonderbehandlung. Man kann alle x_i mit 2 multiplizieren und erhält wieder die normale Geradengleichung.
- Fall 4: $x_1 z_1 \leq 0 < x_2 z_2$; $0 < a_1 b_1 \leq a_2 b_2$. Beide Geraden mit negativen Steigungen, aber Punkte auf unterschiedlichen Seiten. Sonderbehandlung für p_2 aber nicht für p_1 . Man kann x_2 mit 2 multiplizieren und erhält die normale Geradengleichung.
- Fall 5: $0 < x_1 z_1 \leq x_2 z_2$; $a_1 b_1 \leq 0 < a_2 b_2$. Beide Punkte rechts, aber Geraden mit unterschiedlichen Steigungsvorzeichen. Sonderbehandlung nur für l_2 . Man kann a_2 mit 2 multiplizieren und erhält die normale Geradengleichung.
- Fall 6: $x_1 z_1 \leq 0 < x_2 z_2$; $a_1 b_1 \leq 0 < a_2 b_2$; $z_1 \neq 0$. Punkte auf unterschiedlichen Seiten, Geraden mit unterschiedlichen Steigungsvorzeichen, Punkte endlich. Da eine MOULTON-Gerade beim Überqueren der y -Achse das Vorzeichen ihrer Steigung nicht ändert, selbst wenn sie einen Knick hat, ergibt sich das Vorzeichen dieser Steigung aus der Differenz der dehomogenisierten y -Koordinaten:

$$\frac{y_1}{z_1} \leq \frac{y_2}{z_2} \Rightarrow a_2 b_2 \leq 0 \qquad \frac{y_1}{z_1} > \frac{y_2}{z_2} \Rightarrow a_1 b_1 > 0$$

Beide Situationen stehen im Widerspruch zur Annahme dieses Falles.

- Fall 7: $x_1 z_1 = 0 < x_2 z_2$; $a_1 b_1 \leq 0 < a_2 b_2$; $z_1 = 0$. Ein Fernpunkt und ein Punkt rechts, Geraden mit unterschiedlichen Steigungsvorzeichen. Hier legt der Fernpunkt das Vorzeichen der Geraden fest, so dass dieses sich nicht unterscheiden kann:

$$x_1 y_1 \geq 0 \Rightarrow a_2 b_2 \leq 0 \qquad x_1 y_1 < 0 \Rightarrow a_1 b_1 > 0$$

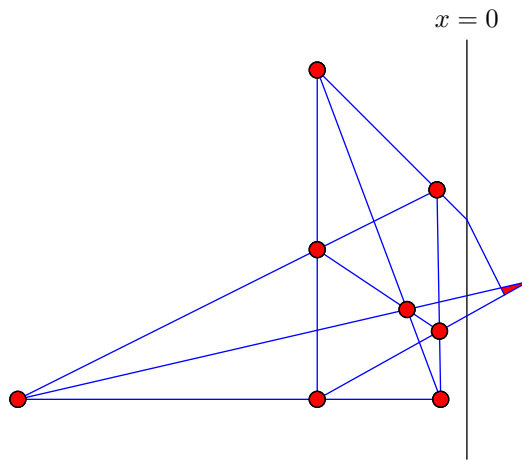
Damit ist gezeigt, dass zwei unterschiedliche Punkte nicht gleichzeitig inzident zu zwei unterschiedlichen Geraden sein können, was zusammen mit der Existenz von Schnittpunkten und Verbindungsgeraden die ersten beiden Axiome erfüllt.

Als projektive Basis kann man diese vier Punkte wählen:

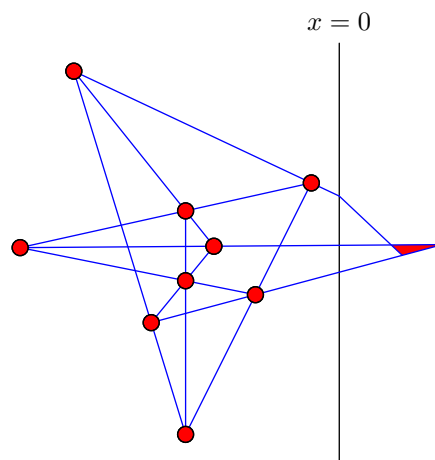
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das negative Vorzeichen im letzten Punkt sorgt dafür, dass die Sonderbehandlung auf keinen dieser Punkte anwendbar ist, so dass man den Nachweis der allgemeinen Lage direkt von \mathbb{RP}^2 erben kann.

- f) Es ist erstaunlich schwer, eine Konstruktion zu produzieren, bei der der Satz „richtig deutlich“ nicht stimmt. Insbesondere wenn man eine Kollinearität als verletzte Konklusion ansetzt, ist diese schwer als solche zu erkennen. Leichter ist das mit einer Konkurrenz. Am einfachsten richtet man es also so ein, dass die Konkurrenz in einer Ecke des Satzes als Konklusion fungiert, und an dieser eine einzige geknickte Gerade mit deutlichem Knick beteiligt ist. Der Rest der Konfiguration sollte komplett auf einer Seite der Achse liegen, um das Bild nicht durch weitere geknickte Geraden zu verkomplizieren.



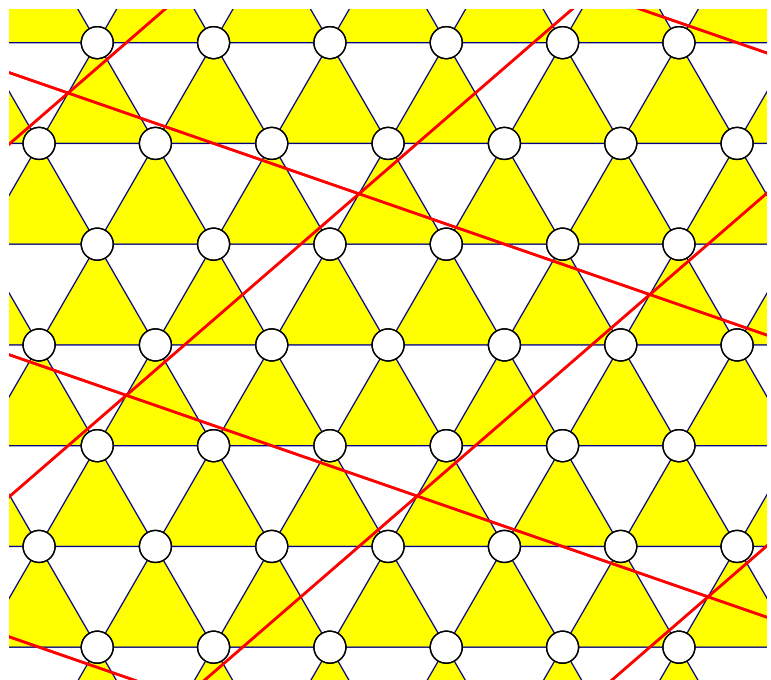
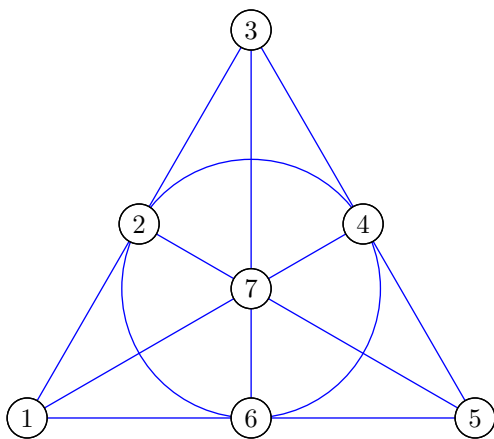
g) Auch für den Satz von Desargues ist es am deutlichsten, eine verletzte Konkurrenz auf der einen Seite zu demonstrieren, während der restliche Satz komplett auf der anderen Seite lebt.



Aufgabe 2. Symmetrie der Fano-Ebene

Betrachten Sie die Fano-Ebene bestehend aus den Geraden

- (1, 2, 3), (3, 4, 5), (5, 6, 1), (1, 4, 7),
 (3, 6, 7), (5, 2, 7), (2, 4, 6)

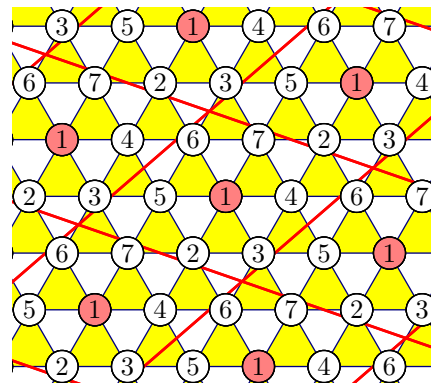


Das abgebildete Dreiecksgitter soll in alle Richtungen unendlich fortgesetzt sein.

- a) Tragen Sie die Zahlen $1 \dots 7$ so in die Kreise des Dreiecksgitters ein, dass jedes gelbe Dreieck einer Geraden der Fano-Ebene entspricht. Außerdem sollen alle Rauten die gleichen Zahlenmuster enthalten, also durch Verschiebung aus einander hervorgehen. In jeder Raute soll jede Zahl genau ein mal vorkommen.
- b) Geben Sie mehrere Automorphismen τ der Fano-Ebene an, die die Gleichung $\tau^7 = \text{id}$ erfüllen. Geben Sie mehrere Automorphismen τ der Fano Ebene an, die die Gleichung $\tau^3 = \text{id}$ erfüllen.
- c) Wie groß ist die Automorphismengruppe der Fano-Ebene? Können Sie diese Zahl auch anhand der Struktur des Dreiecksgitters erklären? Überlegen Sie sich dazu, wie viel Freiheit Sie beim Ausfüllen des Dreiecksmusters hatten.

LÖSUNG:

- a) Ein geeignetes periodisches Zahlenmuster ist rechts abgebildet. Dabei wurde die 1 willkürlich in die Mitte der Raute gesetzt, und die 2 in eines der 6 benachbarten Felder. Dadurch war die Position der 3 festgelegt. Für die 4 gab es noch 4 freie Felder innerhalb der Raute, was dann auch die Position der 7 bestimmt. Ab da ist der Rest festgelegt. So ergibt sich die 3 oberhalb der 7 durch diese Symmetrie Anforderung, und 3 und 7 zusammen bestimmen die 6 in der Raute.



- b) Entlang der Geraden, die die Kanten der gelben Dreiecke bilden, kommt jede Zahl mit Periode 7 vor: bevor eine Zahl wieder auftaucht, sind zuvor alle anderen Zahlen einmal auf der Gerade eingetragen worden. Eine Verschiebung entlang einer dieser Geraden stellt also einen Automorphismus dar, dessen siebte Potenz wieder die Identität ist. Beispiele für solche Permutationen, als Zykel geschrieben:

$$(1\ 4\ 6\ 7\ 2\ 3\ 5)$$

$$(1\ 7\ 5\ 6\ 3\ 4\ 2)$$

$$(1\ 3\ 7\ 4\ 5\ 2\ 6)$$

Eine Symmetrie mit Ordnung 3 stellt die Drehung um 120° dar. Dabei kann sowohl um einen Punkt als auch um die Mitte eines gelben oder weißen Dreiecks gedreht werden. Die folgenden Beispiele sind entstanden, indem jeweils der erste Zyklus als Drehzentrum gewählt wurde, und alle anderen Punkte der dadurch definierten Drehung unterworfen wurden.

$$(1)(2\ 4\ 6)(3\ 7\ 5)$$

$$(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7)$$

$$(1\ 3\ 4)(2\ 5\ 7)(6)$$

- c) Die Zahl der Automorphismen entspricht der Zahl der Möglichkeiten, wie das Dreiecksgitter regelkonform beschriftet werden kann: die gelben Dreiecke sind die Struktur, die dabei erhalten bleiben muss, und die Periodizität stellt sicher, dass die Abbildung zwischen zwei möglichen Beschriftungen in allen Rauten gleich lautet und somit wohldefiniert ist.

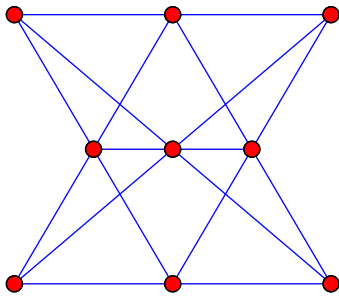
Es gibt 7 Positionen, wo innerhalb der Raute die 1 eingetragen werden kann. Dann gibt es entweder 6 Nachbarfelder, in die die 2 eingetragen werden kann, oder aber 3 Nachbardreiecke, die der Geraden 123 entsprechen, sowie 2 Möglichkeiten, wie der Drehsinn in diesem Dreieck lauten kann. Dann bleiben noch 4 Felder in der Raute, in die die 4 eingetragen werden kann. Ab da ist alles fix. Somit beträgt die Gesamtzahl der Möglichkeiten

$$7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$$

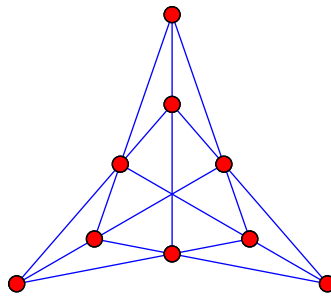
Das entspricht natürlich auch den $7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$ Möglichkeiten, wie man vier Punkte der Fano-Ebene in allgemeiner Lage wählen kann, um diese als projektive Basis zu verwenden.

Aufgabe 3. 9_3 -Konfigurationen

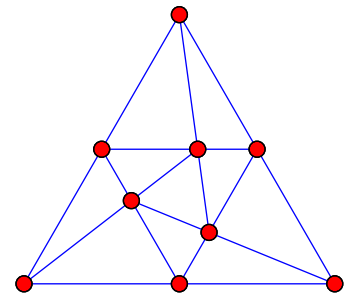
Eine (n_r, n_r) -Konfiguration wird auch abkürzend als n_r -Konfiguration bezeichnet. Hier sehen Sie einige Abbildungen von 9_3 -Konfigurationen.



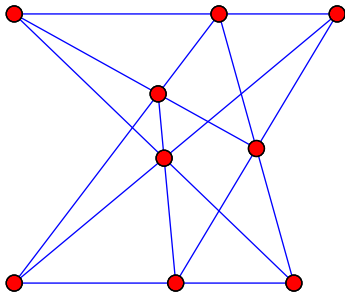
(1)



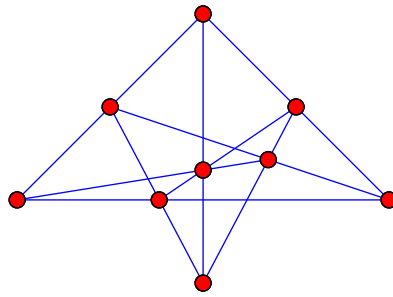
(2)



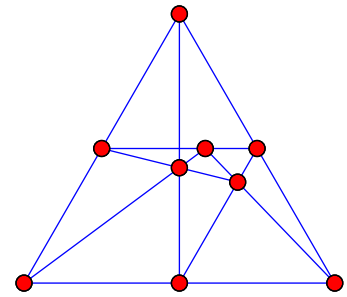
(3)



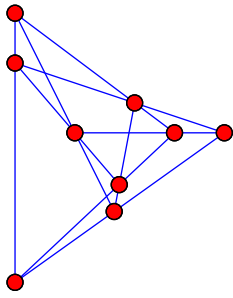
(4)



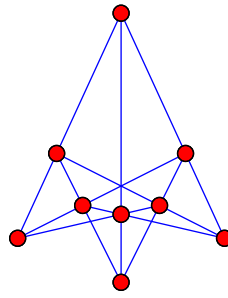
(5)



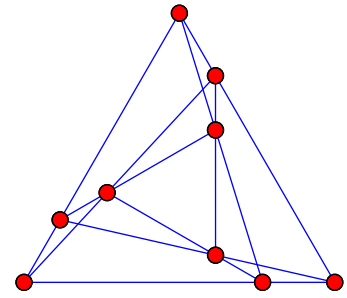
(6)



(7)



(8)



(9)

- Bestimmen Sie, welche dieser Abbildungen isomorphe Inzidenzstrukturen darstellen. Beschriften Sie die Punkte so, dass bei isomorphen Konfigurationen die Namen aller kollinearen Punkttripel übereinstimmen, damit man die Isomorphie leicht erkennt. Die meisten der folgenden Teilaufgaben können für alle zueinander isomorphen Konfigurationen gleichzeitig bearbeitet werden.
- Wählen Sie sich eine der angegebenen Konfigurationen, die *nicht* isomorph zum Satz von Pappos ist. Versuchen Sie, diese (ohne Messen) nachzuzeichnen. Welche freien Parameter ergeben sich dabei?
- Überlegen Sie sich, wie Sie die Koordinaten zu der eben ausgeführten (oder versuchten) Zeichnung *berechnen* könnten.
- Bestimmen Sie zu jeder Konfiguration die duale Inzidenzstruktur, und ermitteln Sie, zu welchen der dargestellten primalen Inzidenzstrukturen diese isomorph ist. Belegen Sie diese Isomorphie wieder durch eine geeignete Beschriftung der ursprünglichen Geraden.

- ★e) Konstruieren Sie weitere 9_3 -Konfigurationen, und untersuchen Sie, zu welchen der abgebildeten Konfigurationen diese isomorph sind.

LÖSUNG:

Ein wertvolles Werkzeug bei der Untersuchung derartiger 9_3 -Konfigurationen ist die *Nicht-Adjazenz-Relation*. Sie gibt an, welche Punkte *nicht* benachbart sind. Da durch jeden Punkt genau drei Geraden gehen, und auf jeder Geraden noch zwei weitere Punkte liegen, gibt es zu jedem Punkt genau zwei andere nicht adjazente Punkte.

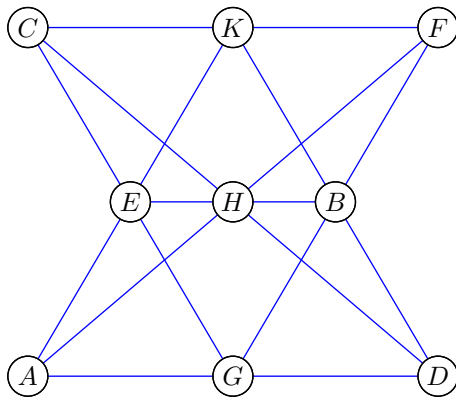
Man kann die Nicht-Adjazenz zum Durchlaufen der Graphen verwenden. Beginnend bei einem beliebigen Punkt gibt es genau zwei mögliche Nachbarn, zu denen man weiter gehen kann. Entscheidet man sich für einen, so gibt es ab da jeweils nur noch einen möglichen Nachbarn, den man nicht besucht hat, so lange, bis man wieder beim Startpunkt ankommt. Es bildet sich also ein (graphentheoretischer, nicht geometrischer) Kreis, der zumindest manche der Punkte des Graphen durchläuft. Wurden bestimmte Punkte dabei nicht abgelaufen, so kann man diese als Startpunkte für weitere Kreise verwenden.

- a) Die Zahl der sich so ergebenden Kreise ist eine Invariante der Inzidenzstruktur, die von der Einbettung in die Zeichenebene unabhängig ist. Haben zwei Graphen eine unterschiedliche Zahl von Kreisen, so können sie nicht isomorph zu einander sein.

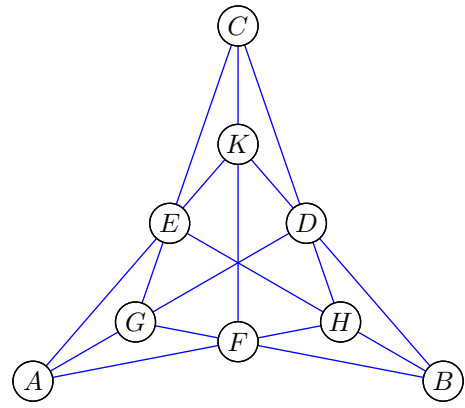
Warnung: Das Gegenteil ist nicht unbedingt der Fall: ein Vergleich der Kreiszahl ist im Allgemeinen nicht ausreichend, um Isomorphie zu beweisen. Nur wenn man bereits sicher weiß, etwa durch Lektüre geeigneter Literatur, dass es kombinatorisch nur drei verschiedene 9_3 -Kombinationen gibt, und diese sich in ihren Kreiszahlen unterscheiden, erst dann kann man die Zahl der Kreise als alleiniges Klassifizierungsmerkmal verwenden.

Man kann die Nicht-Adjazenz auch zum Finden einander entsprechender Beschriftungen verwenden. Sich allein an den Kreisen zu orientieren, reicht zwar noch nicht aus, schränkt aber den Suchraum gewaltig ein. Insgesamt findet man so die folgenden drei Klassen, die sich in ihren Kreiszahlen unterscheiden (also echt unterschiedlich sein müssen), und innerhalb derer sich mit etwas Ausprobieren auch äquivalente Beschriftungen wie die angegebenen finden lassen.

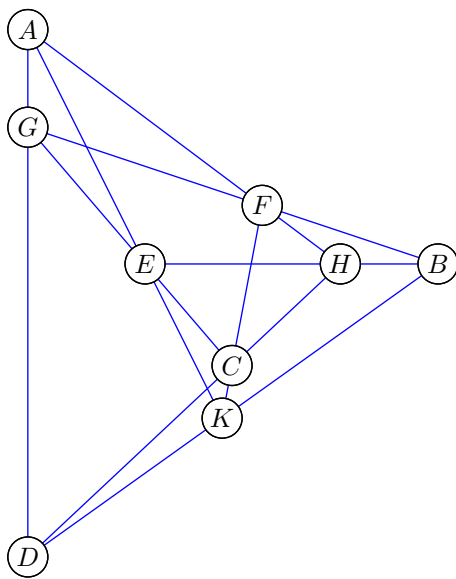
3 Kreise mit je 3 Punkten. Das ist die Konfiguration vom Satz von Pappos.



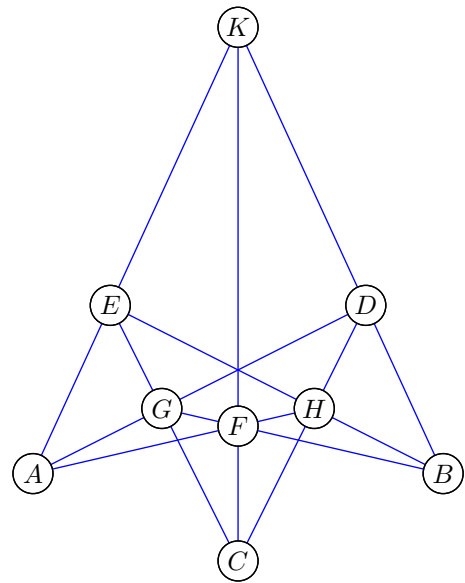
(1)



(2)



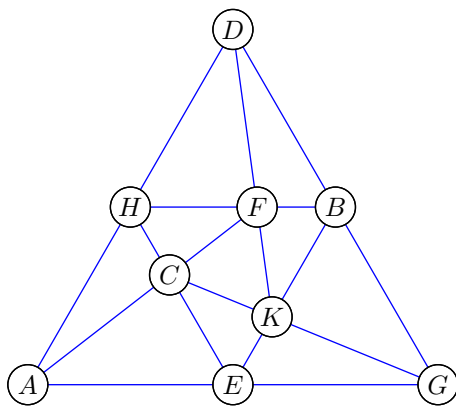
(7)



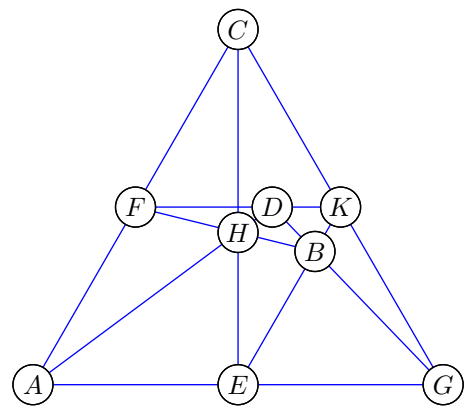
(8)

Kreise: $(ABC), (DEF), (GHK)$
 Kollineare Punktetripel: $ADG, AEK, AFH, BDK, BEH, BFG, CDH, CEG, CFK$

1 Kreis mit 9 Punkten.



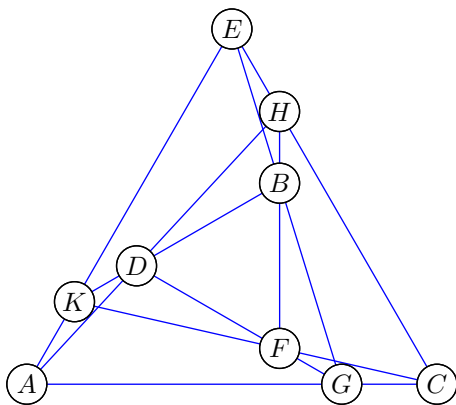
(3)



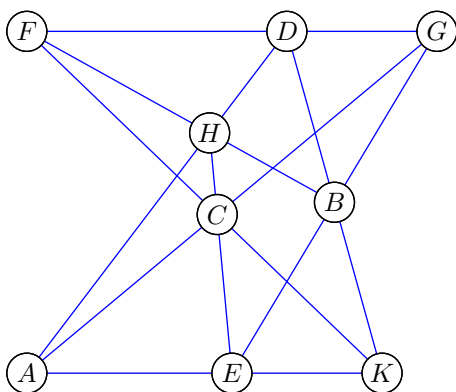
(6)

Kreise: $(ABCDEFGHIK)$
 Kollineare Punktetripel: $ACF, ADH, AEG, BDG, BEK, BFH, CEH, CGK, DFK$

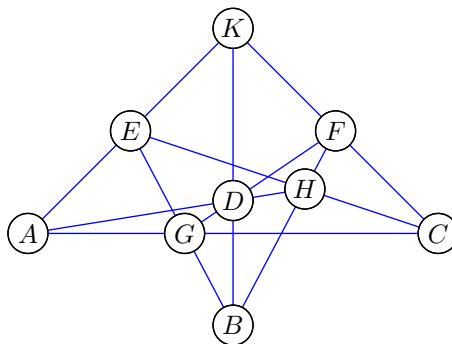
2 Kreise mit 6 und 3 Punkten.



(9)



(4)



(5)

Kreise: $(ABCDEF), (GHK)$
 Kollineare Punktetripel: $ACG, ADH, AEK, BDK, BEG, BFH, CEH, CFK, DFG$

- b) Im Allgemeinen wird eine solche Zeichnung nicht aufgehen. Im Unterschied zum Satz von Pappos sind die anderen 9_3 -Konfigurationen keine inzidenzgeometrischen Sätze, weshalb die letzte Inzidenz sich nicht automatisch ergeben wird, sondern nur für eine speziell gewählte Ausgangslage. Ein gutes Beispiel hierfür ist die Konfiguration (3). Wenn man von einem gleichseitigen äußeren Dreieck ausgeht und das mittlere Dreieck auf den Seitenmitten ansetzt, kann man immernoch einen Eckpunkt des innersten Dreiecks frei wählen, und kann erst hinterher feststellen, ob diese Wahl so gepasst hat.
- c) Für den eben angesprochenen Fall bei Konfiguration (3) kann man in baryzentrischen Koordinaten (also in der projektiven Zeichenebene $x + y + z = 1$ gedacht) formulieren:

$$\begin{array}{lll}
 A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

$$F = (A \times C) \times (B \times H) = \begin{pmatrix} 0 \\ x-1 \\ x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x \\ x \\ 1-x \end{pmatrix}$$

$$K = (D \times F) \times (B \times E) = \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ -x \\ 1-3x \end{pmatrix}$$

$$C' = (G \times K) \times (H \times E) = \begin{pmatrix} 1-3x \\ 0 \\ 1-2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ 5x-2 \\ -3x+1 \end{pmatrix}$$

$$(2x-1)C \stackrel{!}{=} C'$$

$$2x^2 - x = 5x - 2$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Es gibt also zwei mögliche Positionen für C , bei denen die Konstruktion auf geht.

- d) Die Strukturen sind jeweils zu sich selbst dual. Eine anschauliche Methode, um das zu belegen, ist es, eine symmetrische Inzidenzmatrix für die Strukturen anzugeben, da Dualisieren ja Transponieren entspricht.

1 Kreis:

	A B C D E F G H K									
a			×	×				×		DFK
b			×	×				×		CEH
c		×	×		×					BDG
d	×	×			×					ACF
e		×		×				×		BEK
f	×		×					×		ADH
g			×			×	×			CGK
h		×		×	×					BFH
k	×			×	×					AEG

2 Kreise:

	A B C D E F						G H K				
a			×			×			×		BFH
b	×	×						×			ACG
c		×	×						×		BDK
d			×	×				×			CEH
e				×	×			×			DFG
f	×		×						×		AEK
g		×		×				×			BEG
h	×		×					×			ADH
k			×		×				×		CFK

3 Kreise:

	A B C			D E F			G H K				
a			×		×				×		CDH
b		×				×		×			BFG
c	×				×				×		AEK
d	×			×				×			ADG
e		×			×				×		CFK
f		×			×				×		BEH
g		×		×					×		BDK
h	×				×			×			AFH
k			×		×			×			CEG

Warnung: Die Existenz einer symmetrischen Inzidenzmatrix ist erst mal nur eine hinreichende Bedingung dafür, dass eine Inzidenzstruktur zu sich selbst dual sein muss. Es ist damit noch nicht gesagt, dass die Bedingung auch notwendig ist, dass also jede zu sich selbst duale Konfiguration auch als symmetrische Inzidenzmatrix geschrieben werden kann.

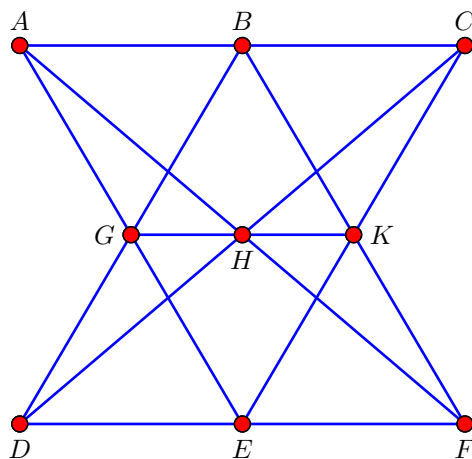
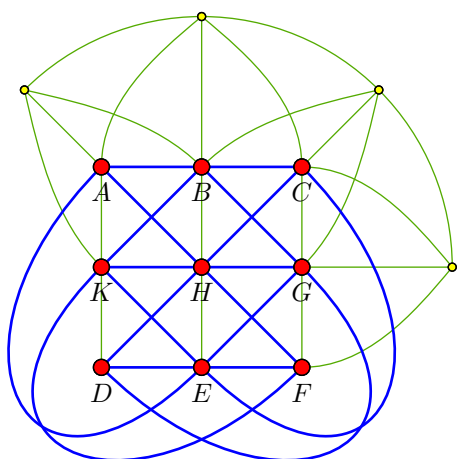
- e) Es existieren lediglich drei kombinatorisch unterschiedliche Typen von 9_3 -Konfigurationen. Jede selbst gezeichnete Konfiguration wird daher einer der angegebenen entsprechen, und kann anhand der Zahl ihrer Nicht-Adjazenz-Kreise eindeutig bestimmt werden.

Aufgabe 4. Endlich Pappos

- a) Was ist die kleinste endliche projektive Ebene, in der nicht-degenerierte Instanzen des Satzes von Pappos möglich sind, und in der dieser Satz allgemeingültig ist?
- b) Fertigen Sie eine Skizze der entsprechenden projektiven Ebene an, in der eine Instanz des Satzes hervorgehoben ist.
- c) Erstellen Sie auch eine Skizze des Satzes von Pappos in $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$. Beschriften Sie die Punkte in beiden Skizzen entsprechend, so dass man die gemeinsame Kombinatorik erkennt.

LÖSUNG:

- a) Da der Satz von Pappos 9 Punkte benötigt, erlaubt die Fano-Ebene lediglich degenerierte Instanzen dieses Satzes. Da der Satz andererseits in jeder projektiven Ebene gilt, die aus einem Körper konstruiert ist, ist $\mathbb{F}_3\mathbb{P}^2$ die kleinste Ebene, in der der Satz sowohl nicht-degeneriert zu sehen als auch allgemeingültig ist. Die Allgemeingültigkeit ergibt sich daraus, dass die algebraischen Beweismethoden, mit denen dieser Satz in der Vorlesung bewiesen wurde, über jedem Körper funktionieren.
- b) Am einfachsten geht man von der (bereits bekannten) Skizze der Ebene $\mathbb{F}_3\mathbb{P}^2$ aus, und markiert in dieser eine Instanz des Satzes.
- c) Wenn man einander entsprechende Punkte mit gleichen Bezeichnungen versieht, und dabei die obere und untere Gerade gleich lässt, stellt man fest, dass in der endlichen Darstellung die Punkte auf der mittleren Geraden in umgekehrter Reihenfolge erscheinen. Das ist jedoch ein Artefakt der Einbettung, es kommt lediglich auf die Kombinatorik an, also auf die Inzidenzen.



Aufgabe 5. Kollineationen

Gegeben seien die folgenden Punkte in \mathbb{CP}^2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad D' = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Finden Sie eine projektive Abbildung, die die Punkte A , B und C fix lässt und den Punkt D auf D' abbildet. Geben Sie eine Funktion $\tau_a : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ an, die den Effekt dieser Abbildung auf die Punkte der Ebene beschreibt.
- Finden Sie eine Kollineation, die keine projektive Abbildung ist, aber dennoch die vier Punkte wie eben angegeben abbildet. Beschreiben Sie auch diese als Funktion $\tau_b : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$
- Wenden Sie die beiden in den vorherigen Teilaufgaben ermittelten Kollineationen auf den Punkt $E = (i, 0, 1)^T$ an, und vergleichen Sie die Ergebnisse.
- Weisen Sie nach, dass die Abbildung τ_b wohldefiniert ist.

LÖSUNG:

- a) Gesucht wird eine Matrix M , die die folgenden vier Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} M \cdot A &= \alpha A & M \cdot B &= \beta B \\ M \cdot C &= \gamma C & M \cdot D &= \delta D' \end{aligned}$$

Da ein skalarer Vorfaktor vor der gesamten Matrix keine Auswirkung auf die projektiv geometrische Interpretation als Abbildung hat, kann einer der skalaren Faktoren frei gewählt werden, etwa $\delta = 1$. Da drei der Urbilder bereits Einheitsvektoren sind, sind die entsprechenden Spalten der Matrix M die Bilder dieser Einheitsvektoren. Durch den vierten Punkt ergibt sich somit das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Vorfaktoren ist die Abbildungsmatrix bestimmt als

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die geforderte Funktion als

$$\tau_a : p \mapsto M \cdot p$$

- b) Die Konjugation stellt einen Automorphismus über \mathbb{C} dar, und die Konjugation aller Einträge eines Vektors lässt sich nicht als projektive Transformation beschreiben. Wir suchen also eine Abbildung, die aus einer Konjugation gefolgt von einer Matrixmultiplikation besteht und die die folgenden Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} M \cdot \bar{A} &= \alpha A & M \cdot \bar{B} &= \beta B \\ M \cdot \bar{C} &= \gamma C & M \cdot \bar{D} &= \delta D' \end{aligned}$$

Da die Urbilder alle reell sind, und die Bilder nicht konjugiert werden, ist die Matrix M identisch zu der in der vorherigen Teilaufgabe. Daraus ergibt sich die Funktion als

$$\tau_b : p \mapsto M \cdot \bar{p}$$

c) Setzt man den Punkt E in die beiden Funktionen ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\tau_a(E) &= M \cdot E = M \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \tau_b(E) &= M \cdot \bar{E} = M \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die beiden Bilder liegen also tatsächlich in unterschiedlichen Äquivalenzklassen. Da die projektive Abbildung τ_a durch die vier Paare aus Urbild- und Bildpunkten eindeutig definiert war, folgt daraus, dass τ_b in der Tat keine projektive Transformation sein kann.

d) Um Wohldefiniertheit zu belegen, muss gezeigt werden, dass die Äquivalenzklasse des Abbildungsergebnisses unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist. Es sei also λp ein allgemeiner Repräsentant der Äquivalenzklasse $[p]$. Dann gilt

$$\tau_b(\lambda p) = M \cdot \overline{(\lambda p)} = M \cdot (\bar{\lambda} \bar{p}) = \bar{\lambda} (M \cdot \bar{p}) = \bar{\lambda} \cdot \tau_b(p) \in [\tau_b(p)]$$