Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Bernhard Werner

Projektive Geometrie SS 2016

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS16

Aufgabenblatt 4 (2016-05-05)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Rationale projektive Ebene

a) Begründen Sie kurz, weshalb $\mathbb{QP}^2 = (\mathcal{P}_\mathbb{Q}, \mathcal{L}_\mathbb{Q}, \mathcal{I}_\mathbb{Q})$ eine projektive Ebene ist.

b) Geben Sie die Transformationsmatrix M an, die eine Drehung um den Ursprung um einen Winkel von 45° gegen den Uhrzeigersinn beschreibt.

c) Die Menge der rationalen Punkte soll jetzt mit einer gedrehten Version ihrer selbst kombiniert und das Ergebnis zu einer projektiven Ebene ergänzt werden. Das Ergebnis ist eine Teilstruktur des $\mathbb{RP}^2$, in dem auch die Operationen $\vee$ und $\wedge$ interpretiert werden.

$$\mathcal{P}_0 := \mathcal{P}_\mathbb{Q} \cup \{M \cdot p \mid p \in \mathcal{P}_\mathbb{Q}\} \qquad \mathcal{L}_0 := \{a \vee b \mid a, b \in \mathcal{P}_0\}$$
$$\mathcal{P}_{i+1} := \{a \wedge b \mid a, b \in \mathcal{L}_i\} \qquad \mathcal{L}_i := \{a \vee b \mid a, b \in \mathcal{P}_i\}$$
$$\mathcal{P} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_i \qquad \mathcal{L} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i$$

Untersuchen Sie, ob schon nach endlich vielen Schritten ein Fixpunkt der Iteration erreicht wird, also ob es ein $i < \infty$ gibt, so dass $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{i+1}$ und $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{i+1}$ gilt.

d) Zeigen Sie kurz, dass die eben konstruierten Punktemengen $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_\mathbb{R}$ und $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}_\mathbb{R}$ zusammen mit der auf diese Mengen Eingeschränkten Inzidenzrelation
$$\mathcal{I} := (\mathcal{P} \times \mathcal{L}) \cap \mathcal{I}_\mathbb{R}$$
eine projektive Ebene bildet.

e) Versuchen Sie, diese Ebene als projektive Ebene über einem Zahlenkörper zu beschreiben. Wenn Sie einen geeigneten Körper finden, geben Sie diesen in einer typischen Schreibweise an.

f) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass in $\mathbb{RP}^2$ jede Kollineation eine projektive Abbildung ist. Finden Sie heraus, an welcher Stelle ein analoger Beweis für die hier konstruierte Ebene $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ scheitert.

g) Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage, dass in der oben konstruierten Ebene jede Kollineation eine projektive Transformation ist.

Aufgabe 2. Ganz oder gar nicht

Wir wollen die Ebene $\mathbb{ZP}^2$ betrachten. Die übliche Definition über skalare Vielfache funktioniert über beliebigen Ringen (oder eigentlich Integritätsbereichen) nicht ganz. Wir machen deshalb folgendes:

Für Elemente $P, Q \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ definieren wir

$$P \sim Q \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} : \; \lambda P = \mu Q.$$

Dann setzen wir

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Z}} := {}^{\mathbb{Z}^3\backslash\{0\}}/_{\sim}.$$

Also $\mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ modulo der Relation $\sim$.

$\mathcal{L}_{\mathbb{Z}}$ definieren wir analog und die Inzidenzrelation $\mathcal{I}_{\mathbb{Z}}$ wie gewohnt über das Skalarprodukt.

a) Ist die angegebene Struktur $(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{L}_{\mathbb{Z}}, \mathcal{I}_{\mathbb{Z}})$ eine echte projektive Ebene? Ist $\sim$ überhaupt eine Äquivalenzrelation?

b) Gibt es eine projektive Ebene über einem Körper, die isomorph zur angegebenen Struktur ist? Falls ja, benennen Sie diesen Körper. Falls nein, führen Sie einen Beweis, dass es einen solchen Körper nicht geben kann.

c) Geben Sie eine Inzidenzkonfiguration an, die innerhalb dieser Struktur nicht realisierbar ist, innerhalb von $\mathbb{RP}^2$ hingegen schon.

— ***Hausaufgaben***—

Aufgabe 3. Geometrisch berechenbare Operationen

Für drei Punkte A, B, C auf einer projektiven Geraden sei die Funktion h definiert durch

$$h(A, B; C) = D \quad \Leftrightarrow \quad (A, B; C, D) = -1$$

Die Funktion h errechnet also aus drei Punkten einen vierten, der in der beschriebenen Weise harmonisch zu diesen dreien liegt. Außerdem seien auf der Rechengerade die Punkte 0, 1 und ∞ ausgezeichnet sowie weitere Punkte x und y vorgegeben.

a) Ermitteln Sie, welche der folgenden Punkte auf der Rechengeraden sich durch Anwendung der Funktion h aus den vorgegebenen Punkten konstruieren lassen. Bei denen, bei denen diese Konstruktion funktioniert, geben Sie eine entsprechende Formel an. Bei denen, bei denen eine Konstruktion mit diesen Mitteln nicht möglich ist, begründen Sie diese Tatsache.

(1) $3 \cdot x$	(4) $x \cdot y$	(7) $\sqrt{x}$
(2) $x + y$	(5) $\frac{1}{x}$	(8) x^2
(3) $x - y$	(6) $\frac{x}{y}$	(9) e^x

Hinweis: Sie dürfen Rechenoperationen, die Sie bereits auf die Funktion h zurück geführt haben, als abkürzende Schreibweise verwenden, wenn Sie darauf aufbauende Operationen beschreiben. Es muss also nicht jeder einzelne Ausdruck tatsächlich allein durch geschachtelte h-Funktionen angegeben werden, solange Ihnen bewusst ist, dass eine solche Schreibweise prinzipiell möglich wäre.

b) Die Funktion h ist nicht definiert, falls zwei der drei Punkte A, B, C zusammenfallen. Untersuchen Sie, welche Ihrer eben angegebenen Formeln von diesem Fall betroffen sein können, und geben Sie Fallunterscheidungen an, die auch in diesen Sonderfällen die gewünschte Berechnung ermöglichen. Sie können davon ausgehen, dass die Punkte 0, 1 und ∞ paarweise verschieden sind.

c) Gegeben sei ein weiterer Punkt, von dem behauptet wird, er habe in der angegebenen projektiven Skala die Position $\sqrt{2}$. Können Sie diese Behauptung mit einer Inzidenzkonfiguration überprüfen? Falls nein, warum ist dies unmöglich? Falls ja, kann diese Inzidenzkonfiguration zur Konstruktion des Punktes $\sqrt{2}$ verwendet werden?

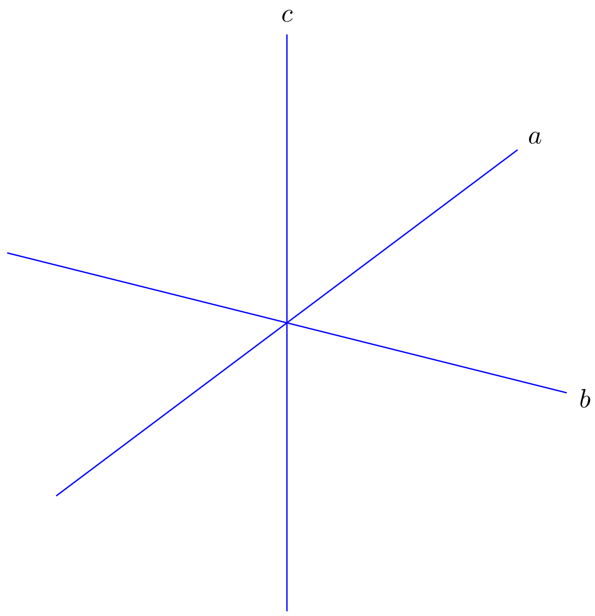
Aufgabe 4. Rechnen mit Geradensteigungen

Betrachtet man für Geraden in der reellen Ebene nur deren Steigungen, so bilden diese eine projektive Gerade: alle reellen Zahlen können als Steigungen vorkommen, und außerdem gibt es Geraden mit unendlicher Steigung.

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die zu gegebenen Punkten A, B, C den dazu harmonischen Punkt D konstruiert, so dass $(A, B; C, D) = -1$ ist. Geben Sie zu dieser Konstruktion auch eine schrittweise Konstruktionsbeschreibung.

b) Dualisieren Sie diese Konstruktionsbeschreibung.

c) Benutzen Sie die duale Konstruktion, um zu den folgenden Geraden $a, b; c$ die harmonische Gerade d zu konstruieren.



d) Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis der eben konstruierten vier harmonischen Geraden sich auch schreiben lässt als Bruch von Determinanten von homogenen Koordinaten der involvierten Geraden.

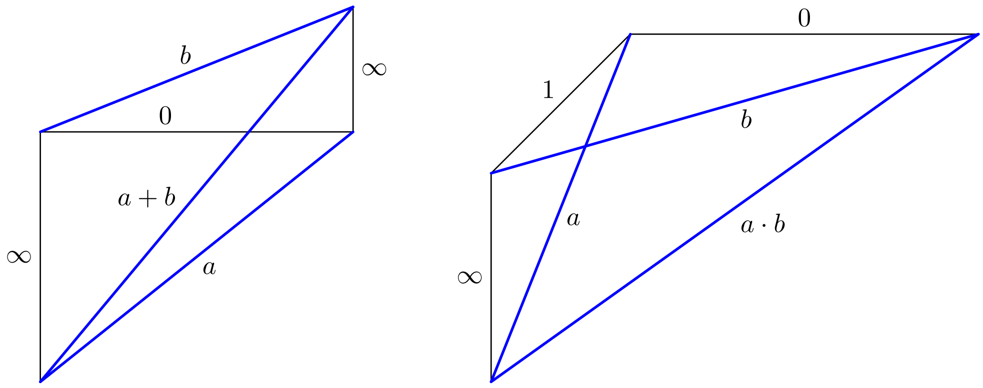
e) Betrachten Sie allgemein das Doppelverhältnis vier beliebiger Geraden durch einen gemeinsamen Punkt, das wie eben angegeben über Determinanten aus den homogenen Koordinaten der Geraden errechnet wird. Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte der Geraden mit der Geraden im Unendlichen das gleiche Doppelverhältnis haben.

f) Schneiden Sie in der Zeichnung zu Aufgabe c) die vier konkurrenten Geraden mit einer weiteren (endlichen) Geraden. Untersuchen Sie durch eine geeignete Konstruktion, ob die sich ergebenden Schnittpunkte in harmonischer Lage liegen.

g) Argumentieren Sie, warum man ein Doppelverhältnis von vier Geradensteigungen sinnvoll definieren kann, auch wenn diese Geraden nicht durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen.

h) Geraden mit Steigungen 0, 1 und ∞ legen eine projektive Skala fest. Überprüfen Sie, dass sich mit dieser Skala Geradensteigungen direkt messen lassen, dass also die Steigung, wie sie der Koordinatenvektor vorgibt, mit der über Doppelverhältnisse berechneten Steigung übereinstimmt.

i) Beweisen Sie, dass die folgenden Konstruktionen tatsächlich verwendet werden können, um Geradensteigungen zu addieren und zu multiplizieren, so wie es die Beschriftung suggeriert. Sie dürfen auch affine oder euklidische Argumente verwenden.


b
∞
0
a + b
∞
a
0
1
b
a
a · b
∞