4.7 Flächenabbildung

Tafelskizze: Flächen Φ und Φ^*, zugehörige Parametergebiete G und G^*, Flächenabbildung $\alpha: \ \Phi \to \Phi^*$, Parameterdarstellungen $\vec{x}$ und $\vec{x}^*$, Punkt P von Φ mit Bildpunkt $P^* = \alpha P$ von Φ^*

4.7.1 Beschreibung von Flächenabbildungen

Eine bijektive C^r-**Abbildung** α einer einfachen C^r-Fläche Φ: $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, auf eine einfache C^r-Fläche Φ^* : $\vec{x}^*(u^*,v^*)$, $(u^*,v^*) \in G^*$, wird beschrieben durch eine C^r-Abbildung $G \to G^*$, nämlich $(\vec{x}^*)^{-1} \circ \alpha \circ \vec{x} : \ G \to G^*, \ (u,v) \mapsto (u^*(u,v), v^*(u,v))$.

Das erinnert an eine PT, ist aber zunächst keine.

4.7.2 Kanonische Beschreibung von Flächenabbildungen

PT auf Φ^* : $G \to G^*$, $(u,v) \mapsto (u^*(u,v), v^*(u,v))$.

Jetzt sind Φ und Φ^* auf gleiche Parameter (u,v) bezogen, und zu $P^* = \alpha P$ gehören dieselben Parameterwerte wie zu P.

Die Flächen Φ und Φ^* sind **in kanonischer Weise** aufeinander abgebildet.

4.7.3 Def.: Eine bijektive C^r-Abbildung zweier einfacher C^1-Flächen Φ, Φ^* aufeinander heißt

a) **längentreu** (isometrisch) :$\Leftrightarrow$ Entsprechende Kurven auf Φ und Φ^* haben stets gleiche Länge.

b) **winkeltreu** (**konform**) :$\Leftrightarrow$ Entsprechende Kurvenpaare auf Φ und auf Φ^* haben stets gleiche Schnittwinkel.

c) flächentreu $:\Leftrightarrow$ Entsprechende Flächenstücke auf Φ und Φ^* haben stets gleiche Flächeninhalte.

4.7.4 Satz: Zwei reguläre C^1-Flächen $\Phi : \vec{x}(u,v), (u,v) \in G$, und $\Phi^* : \vec{x}^*(u,v), (u,v) \in G$, seien durch eine Flächenabbildung α in kanonischer Weise aufeinander abgebildet. Dann gilt: α ist

a) längentreu (isometrisch) $\Leftrightarrow g^*_{jk} = g_{jk} \; \forall \; (u,v) \in G$.

b) winkeltreu (**konform**) $\Leftrightarrow g^*_{12} : g^*_{11} : g^*_{22} = g_{12} : g_{11} : g_{22} \; \forall \; (u,v) \in G$.

c) flächentreu $\Leftrightarrow g^* = g \; \forall \; (u,v) \in G$.

Bew.: Idee für Längentreue, wenn gewünscht

4.7.5 Korollar: Für eine bijektive C^1-Flächenabbildung $\alpha : \Phi \to \Phi^*$, wobei Φ, Φ^* einfache Flächen sind, gilt: α längentreu $\Leftrightarrow$ α winkeltreu und flächentreu

4.8 Geodätische

4.8.1 Def.: (mangelhaft!)

Φ regul. C^1-Fläche, c regul. C^1-Flächenkurve von Φ. Dann heißt c **geodätische Linie** von Φ, kurz: **Geodätische** von Φ, wenn gilt: Für je zwei Punkte $\vec{x}$, $\vec{y}$ von c, die nicht zu weit auseinander liegen, liegt die kürzeste Verbindung von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ auf c.

Mangel: Was heißt "nicht zu weit auseinander"? Korrekte Definition mit Differentialgleichungen.

4.8.2 Beispiele

Tafelskizze: Sphäre Φ mit Großkreis c, der durch zwei nicht diametrale Punkte $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in zwei Bögen c_1 und c_2 zerlegt wird, c_1 kürzer als c_2.

c_1 und c_2 sind Geodätische, die $\vec{x}$ und $\vec{y}$ verbinden. Davon ist c_1 die kürzeste Verbindung von x und y auf Φ.

Tafelskizze: Drehzylinder Φ mit darauf liegender Schraublinie c, auf der $\vec{x}$ und $\vec{y}$ liegen, die zugleich auf einer gemeinsamen Erzeugenden von Φ liegen.

Die Schraublinie c ist nicht kürzeste Verbindung von $\vec{x}$ und $\vec{y}$.

Es gibt ∞ viele Schraublinien, die $\vec{x}$ und $\vec{y}$ verbinden.

Gegenpunkte auf der Sphäre werden durch unendlich viele Kürzeste verbunden, andere Punkte auf der Sphäre durch genau eine.

4.8.3 Satz: Sie Φ eine reguläre C^3-Fläche in $\mathbb{E}^3$. Dann gilt:

a) Jedes geradlinige Kurvenstück in Φ ist eine Geodätische von Φ.

b) Zu je zwei Punkten von Φ, die nicht zu weit voneinander entfernt sind, gibt es (in einer nicht zu großen Umgebung) genau eine verbindende Geodätische.

c) Zu jedem Punkt $\vec{x}$ auf Φ und zu jeder Tangente t von Φ in $\vec{x}$ gibt es genau eine Geodätische von Φ durch $\vec{x}$ mit der Tangente t.

d) Sei c reguläre C^2-Flächenkurve von Φ ohne W-Punkte. Dann gilt: c Geodätische von Φ $\Leftrightarrow$ In allen Punkten von c ist die Schmiegebene von c senkrecht zu Φ.

Bew.:

zu a) klar

zu b) nach Präzisierung: mit Variationsrechnung

zu c) mit Differentialgleichungen

zu d) kein Bew., aber Plausibilitätsüberlegung:
Spannt man einen Faden zwischen zwei Punkten einer Fläche Φ, so rutscht er in jedem Punkt längs Φ und in Richtung der Schmiegebene des Fadens, bis das nicht mehr geht.

4.9 Flächenkrümmungen

Flächenkrümmung hat etwas zu tun mit der Änderung des Normaleneinheitsvektors.

4.9.1 Def.: Zweite Grundform der Flächentheorie

$\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, regul. C^2-Fläche,

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}$$

$$\vec{x}_{uu} \cdot \vec{n} =: h_{11},$$

$$\vec{x}_{uv} \cdot \vec{n} =: h_{12} = h_{21} := \vec{x}_{vu} \cdot \vec{n},$$

$$\vec{x}_{vv} \cdot \vec{n} =: h_{22}.$$

Damit heißt

$$II(a_1, a_2) = a_1^2 h_{11} + 2a_1 a_2 h_{12} + a_2^2 h_{22}$$

die **zweite Grundform der Flächentheorie**.

4.9.2 Berechnungen der h_{jk}

$$\vec{n}\vec{x}_u = 0 \Rightarrow \vec{n}_u\vec{x}_u + \vec{n}\vec{x}_{uu} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{11} = -\vec{n}_u\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_u = 0 \Rightarrow \vec{n}_v\vec{x}_u + \vec{n}\vec{x}_{uv} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{12} = -\vec{n}_v\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_v = 0 \Rightarrow \vec{n}_u\vec{x}_v + \vec{n}\vec{x}_{vu} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{21} = -\vec{n}_u\vec{x}_v = -\vec{n}_v\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_v = 0 \Rightarrow \vec{n}_v\vec{x}_v + \vec{n}\vec{x}_{vv} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{22} = -\vec{n}_v\vec{x}_v$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}} \Rightarrow$$

$$h_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{uu}\vec{x}_u\vec{x}_v)$$

$$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{uv}\vec{x}_u\vec{x}_v) = h_{21}$$

$$h_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{vv}\vec{x}_u\vec{x}_v)$$

4.9.3 Satz von MEUSNIER

$\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, reguläre C^2-Fläche,
$c: \ \ \vec{x}(s) := \vec{x}(u(s), v(s)), \ \ s \in I$, reguläre W-Punkt-freie C^2- Flächenkurve von Φ, s Bogenlänge von c,

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}},$$

τ Tangentenebene von Φ in $\vec{x}(s)$,
σ Schmiegebene von c in $\vec{x}(s)$.
Dann gilt: $\vec{x}''\vec{n} = \kappa \vec{n}_c \vec{n}$, wobei
κ ... Krümmung von c
$\vec{n}_c$ ... Hauptnormalenvektor von c,
also

$$\vec{x}''\vec{n} = \kappa \cos\angle(\vec{n}_c, \vec{n}) = \kappa \sin\angle(\sigma, \tau).$$

Tafelskizze

Andererseits ist
$\vec{x}' = \vec{x}_u u' + \vec{x}_v v'$,
$\vec{x}'' = \vec{x}_{uu} u'^2 + 2\vec{x}_{uv} u'v' + \vec{x}_{vv} v'^2 + \vec{x}_u u'' + \vec{x}_v v''$,
also

$$\vec{x}''\vec{n} = h_{11}u'^2 + 2h_{12}u'v' + h_{22}v'^2 =$$

$$= \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{(\frac{ds}{dt})^2}$$

4.9.3.1 Satz: $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, reguläre C^2-Fläche,
$c: \ \vec{x}(t) := \vec{x}(u(t),v(t)), \ t \in I$, reguläre W-Punkt-freie C^2- Flächenkurve von Φ,
$\kappa(t) \ldots$ Krümmung von c
τ Tangentenebene von Φ an der Stelle $(u(t),v(t))$,
σ Schmiegebene von c an der Stelle t.
Dann ist

$$\kappa \cdot \sin\angle(\sigma,\tau) = \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2} =$$

$$= \frac{II(\dot{u},\dot{v})}{I(\dot{u},\dot{v})} =: \kappa_n$$

$\kappa_n \ldots$ **Normal(schnitt)krümmung** von Φ an der Stelle (u,v) in Richtung $(\dot{u},\dot{v})$.

4.9.3.2 Korollar: Sei P ein einfacher Punkt einer regulären C^2-Fläche Φ. Dann gilt: Alle regulären C^2-Flächenkurven von Φ, für die P ein einfacher Punkt und kein W-Punkt ist, die in P dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegebene besitzen, die nicht Tangentenebene von Φ in P ist, haben in P dieselbe Krümmung.

4.9.4 Hauptkrümmungen

P fester regulärer Punkt einer C^2-Fläche Φ

Für alle Flächenrichtungen $(\dot{u}, \dot{v})$ in P ist die Normalkrümmungen $\kappa_n(\dot{u}, \dot{v})$ erklärt.

Die Extremwerte heißen **Hauptkrümmungen** κ_1, κ_2 von Φ in P.

$K := \kappa_1 \cdot \kappa_2$ heißt **Gaußsche Krümmung** von Φ in P.

$H := \frac{1}{2} \cdot (\kappa_1 + \kappa_2)$ heißt **mittlere Krümmung** von Φ in P.

Theorema egregium (Gauß): Die Gaußsche Krümmung K ändert sich bei längentreuen Abbildungen nicht.

K ist für eine Ebene $= 0$, für eine Kugel $= \frac{1}{r^2}$

Folgerung: Es gibt keine längentreuen Landkarten.