4 Flächen

4.1 Flächenbegriff

4.1.1 Beispiel: Kugel

Kugel im Raum:

$x^2+y^2+z^2=r^2$ ... **implizite Darstellung**

Tafelskizze zur Parameterdarstellung: Achtelkugel mit $x, y, z \geq 0$

$x = r \cos u \cos v$
$y = r \cos u \sin v$
$z = r \sin u$

Bei "Erdkugel":
u ... "geographische Breite"
v ... "geographische Länge"

4.1.2 Def.: Fläche

Eine (C^r-)**Fläche** Φ in $\mathbb{E}^3$ ist gegeben durch
eine C^r-Abb. $\vec{x}$ eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ ($r \geq 1$):

$$\vec{x} : G \to \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{x} : (u,v) \mapsto \vec{x}(u,v).$$

$\vec{x}$ ... **Parameterdarstellung**, kurz: **PD**
G ... **Parametergebiet**

Tafelskizze dazu

4.1.3 Schreibweisen u.a.: Φ : $\vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$,

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u,v) \\ x_2(u,v) \\ x_3(u,v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(u_1,u_2) \\ x_2(u_1,u_2) \\ x_3(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

4.2 Flächenkurven

4.2.1 Def.: Flächenkurve

Tafelskizze dazu

Seien $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$ eine C^r-Fläche in $\mathbb{E}^3$ und
$\bar{c} : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix},\ t \in I$, eine C^r-Kurve in G.
Dann heißt $c : \vec{x}(u(t), v(t)),\ t \in I$, eine C^r-Flächenkurve von Φ.

4.2.2 Parameterlinien

Tafelskizze von G

Flächenkurven der Gestalt
$\vec{x}(u, v_0),\ u \in I$ heißen u-**Linien** oder **1-Linien**,
$\vec{x}(u_0, v),\ v \in J$ heißen v-**Linien** oder **2-Linien**.

Zu jeder Parameterstelle (u_0, v_0) gibt es genau eine
u-Linie $\vec{x}(u, v_0),\ u \in I$ und genau eine
v-Linie $\vec{x}(u_0, v),\ v \in J$.

4.2.3 Tangentenvektoren

Tafelskizze

Ist $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$ eine C^1-Fläche und
$c : \vec{x}(u(t),v(t)),\ t \in I$, eine C^1-Flächenkurve von Φ, so sind:
$\vec{x}_1 := \vec{x}_u := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ ein Tangentenvektor an eine u-Linie,
$\vec{x}_2 := \vec{x}_v := \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ ein Tangentenvektor an eine v-Linie,
und nach der Kettenregel
$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v}$ ein Tangentenvektor an c.

4.3 Regularität

Tafelskizze mit Gegenbeispiel

4.3.1 Def.: Ist $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine C^1-Fläche, so heißt $(u_0, v_0) \in G$ eine **reguläre Parameterstelle** von Φ, wenn gilt: $\{\vec{x}_u(u_0,v_0), \vec{x}_v(u_0,v_0)\}$ l.u.

Andernfalls heißt (u_0, v_0) **singulär**.

Tafelskizze mit Beispiel

4.3.2 Satz: Sei $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine C^1-Fläche. Dann ist $(u_0, v_0) \in G$ eine reguläre Parameterstelle von Φ

$$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v|_{(u_0,v_0)} \neq \vec{o}.$$

Sind alle $(u,v) \in G$ regulär, so heißt Φ eine **reguläre Fläche**.

4.3.3 Bem.: Ist (u_0, v_0) eine reguläre Parameterstelle von Φ und gilt: $\vec{x}(u,v) = \vec{x}(u_0,v_0) \Rightarrow (u,v) = (u_0,v_0)$, so heißt $\vec{x}(u_0,v_0)$ auch ein **regulärer Punkt** von Φ.

Tafelskizze

4.3.4 Bem.: Ist Φ eine reguläre Fläche, so sagt man: Die Parameterlinien von Φ bilden ein **Gitter** oder ein **Netz** auf Φ.

4.3.5 Def.: Eine PD $\vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, einer Fläche Φ heißt C^r-**zulässig** oder eine **zulässige** C^r-**PD** von Φ, wenn gilt:

(1) $\vec{x}$ ist C^r-PD von Φ mit $r \geq 1$.

(2) Jedes $(u,v) \in G$ ist eine reguläre Parameterstelle von Φ.

4.3.5 Def.: Sei $\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine reguläre C^1-Fläche. Ein Punkt $\vec{x}(u_0,v_0)$ heißt **einfacher Punkt** von Φ, wenn gilt: $\vec{x}(u,v) = \vec{x}(u_0,v_0) \Rightarrow (u,v) = (u_0,v_0)$.

Die Fläche Φ heißt **einfache Fläche**, wenn alle Punkte von Φ einfach sind.

4.4 Tangential-VR, Tangentialebene

4.4.1 Def.: Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine C^1-Fläche; sei $(u_0,v_0) \in G$ eine reguläre Stelle von Φ. Dann heißt der VR mit der Basis $\{x_u(u_0,v_0), x_v(u_0,v_0)\}$ der **Tangential-VR** (kurz: **TVR**) von Φ an der Stelle (u_0,v_0). Die Ebene durch $\vec{x}(u_0,v_0)$, die parallel ist zu $x_u(u_0,v_0)$ und $x_v(u_0,v_0)$, heißt die **Tangentialebene** (kurz: **TE**) oder **Tangentenebene** von Φ an der Stelle (u_0,v_0).

4.4.2 Flächenvektoren, Flächentangenten

Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine C^1-Fläche; sei $(u_0,v_0) \in G$ eine reguläre Stelle von Φ.

a) Ist $\bar{c}$: $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, $t \in I$, eine C^1-Kurve mit der regulären Stelle t_0 und $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0,v_0)$, und ist c : $\vec{x}(u(t),v(t))$, $t \in I$, die zugehörige Flächenkurve, so liegt der Tangentenvektor $\dot{\vec{x}} = \vec{x}_u\dot{u} + \vec{x}_v\dot{v}$ von c an der Stelle t_0 im TVR von Φ an der Stelle (u_0,v_0).

b) Zu jedem Vektor $a\vec{x}_u(u_0, v_0) + b\vec{x}_v(u_0, v_0)$ im TVR von Φ an der Stelle (u_0, v_0) gibt es eine Flächenkurve c von Φ durch $\vec{x}(u_0, v_0)$, so dass gilt: Der Tangentialvektor von c an der Stelle $t = 0$ mit $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ ist der vorgegebene Vektor $a\vec{x}_u(u_0, v_0) + b\vec{x}_v(u_0, v_0)$.

Bew. von b): Wir setzen

$$c : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + ta \\ v_0 + tb \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\dot{\vec{x}}(u(t), v(t)) = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v} = \vec{x}_u a + \vec{x}_v b$ längs c, und speziell für $t = 0$: $\dot{\vec{x}}(u(0), v(0)) = \vec{x}_u(u_0, v_0)a + \vec{x}_v(u_0, v_0)b$.

4.4.3 Bezeichnung: a, b heißen die **Flächenkoordinaten** des **Flächenvektors** $a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$.

4.5 Messen auf Flächen

Wir untersuchen
- Längen von Flächenkurven
- Winkel schneidender Flächenkurven
- Oberflächen von Flächenstücken

auf der Fläche - ohne umgebenden Raum.

Die erste Grundform der Flächentheorie

4.5.1 Def.: Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine reguläre C^1-Fläche. Dann heißen

$$g_{11}(u,v) := \vec{x}_u(u,v) \cdot \vec{x}_u(u,v) =: E(u,v),$$

$$g_{12} := \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v =: g_{21} =: F,$$

$$g_{22} := \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v =: G$$

die **Fundamentalgrößen 1. Art** oder die **metrischen Fundamentalgrößen** oder die **Koeffizienten der 1. Grundform** von Φ.

4.5.2 Bem.: Die Bezeichnungen E, F, G stammen noch von Gauß aus den "Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1828).

4.5.3 Determinante der 1. Grundform:

$$\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 =: g$$

4.5.4 Normalenvektor von Φ:

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

Länge des Normalenvektors:

$$(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = \vec{x}_u^2 \ \vec{x}_v^2 - (\vec{x}_u \ \vec{x}_v)^2 =$$

$$= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = g$$

Nomaleneinheitsvektor von Φ:

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}}$$

4.5.5 Herleitung: Länge einer Flächenkurve

Vor.: $c: \ \vec{x}(u(t), v(t)), \ t \in I$ reguläre C^1-Flächenkurve einer regulären C^1-Fläche $\Phi: \ \vec{x}(u, v), \ (u, v) \in G$.

Beh.: Dann ist die Länge eines Kurvenstücks von c:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \ |\dot{\vec{x}}(u(t), v(t))| \ dt$$

mit

$$\dot{\vec{x}}(u(t), v(t))^2 = (\vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v})^2 =$$

$$= \vec{x}_u^2 \dot{u}^2 + \vec{x}_u \vec{x}_v \dot{u}\dot{v} + \vec{x}_v \vec{x}_u \dot{v}\dot{u} + \vec{x}_v^2 \dot{v}^2 =$$

$$= g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2.$$

4.5.6 Satz: Ist eine reguläre C^1-Flächenkure c einer regulären C^1-Fläche $\Phi : \ \vec{x}(u, v), \ (u, v) \in G$, gegeben durch $(u(t), v(t)), \ t \in [t_1, t_2]$, so gilt für die Länge s von c:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \ \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2} \ dt.$$

4.5.7 Def.: Die quadratische Form

$$I(a_1, a_2) := g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2$$

heißt die **1. Grundform** oder **1. Fundamentalform** von Φ (an der Stelle (u, v)).

4.5.8 Skalarprodukt und 1. Grundform

Sind $\vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$ und $\vec{b} = b_1\vec{x}_u + b_2\vec{x}_v$ aus dem TVR einer Fläche Φ an einer Stelle (u_0, v_0), so ist

$$\vec{a}\,\vec{b} = g_{11}a_1b_1 + g_{12}a_1b_2 + g_{21}a_2b_1 + g_{22}a_2b_2 =$$

$$= g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2$$

• das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ und zugleich
• die symmetrische Bilinearform, die zu der quadratischen Form $I(\ldots)$ im TVR gehört.

4.5.9 Länge eines Flächenvektors: Ist $\vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$ ein Flächenvektor, so ist

$$\sqrt{a_1^2g_{11} + 2a_1a_2g_{12} + a_2^2g_{22}} = \sqrt{I(a_1, a_2)}$$

die Länge von $\vec{a}$.

4.5.10 Satz: (Winkel zweier Flächenvektoren)

Sind

$$\vec{o} \neq \vec{a} = a_1 \vec{x}_u + a_2 \vec{x}_v$$

und

$$\vec{o} \neq \vec{b} = b_1 \vec{x}_u + b_2 \vec{x}_v$$

zwei Flächenvektoren einer Fläche Φ an einer Stelle (u_0, v_0), so ist

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= \frac{g_{11} a_1 b_1 + g_{12}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + g_{22} a_2 b_2}{\sqrt{I(a_1, a_2)}\sqrt{I(b_1, b_2)}}.$$

4.5.11 Winkel zwischen Flächenkurven

Seien c_1, c_2 zwei C^1-Flächenkurven auf einer C^1-Fläche $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, gegeben durch:

$$c_1: \ (u_1(t), v_1(t)), \ t \in I,$$

$$c_2: \ (u_2(w), v_2(w)), \ w \in J,$$

mit

$$(u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(w_0), v_2(w_0)) =: (u_0, v_0),$$

wobei

$$\left\{ \begin{array}{c} t_0 \\ w_0 \\ (u_0, v_0) \end{array} \right\} \text{ reguläre Stelle von } \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \Phi \end{array} \right\}.$$

Dann ist der Winkel φ von c_1 und c_2 an der Stelle (u_0, v_0) gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{g_{11}\dot{u}_1\widehat{u}_2 + g_{12}(\dot{u}_1\widehat{v}_2 + \widehat{u}_2\dot{v}_1) + g_{22}\dot{v}_1\widehat{v}_2}{\sqrt{I(\dot{u}_1, \dot{v}_1)}\sqrt{I(\widehat{u}_2, \widehat{v}_2)}}.$$

Dabei bezeichnet " $\dot{}$ " die Ableitung nach t und $\widehat{}$ die nach w.

4.5.12 Winkel mit Parameterlinien

Sei c_1 eine u-Linie einer regulären C^1-Fläche Φ, c_2 eine beliebige Flächenkurve von Φ. Dann ist

$$\dot{u}_1 = 1, \dot{u}_2 = 0$$

und

$$\cos\varphi = \frac{g_{11}\dot{u}_2 + g_{12}\dot{v}_2}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{I(\dot{u}_2, \dot{v}_2)}}.$$

$\dot{}$ . . . Ableitung nach w!
Sei zusätzlich c_2 eine v-Linie, also

$$\dot{u}_2 = 0, \dot{v}_2 = 1.$$

Dann ist

$$\cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

4.5.13 Bem.: Die Parameterlinien bilden ein **orthogonales Netz** auf Φ

$$\Leftrightarrow g_{12} = 0 \ \forall \ (u, v) \in G.$$

4.5.14 Oberfläche eines Flächenstücks: Motivation:

Tafelskizze: Fläche Φ mit einer Masche des Parameternetzes mit Parameterwerten (u_i, v_k), (u_{i+1}, v_k), (u_i, v_{k+1}), (u_{i+1}, v_{k+1}).

Fläche einer Masche des Gitters näherungsweise:

$$|(\vec{x}(u_{i+1}, v_k) - \vec{x}(u_i, v_k)) \times (\vec{x}(u_i, v_{k+1}) - \vec{x}(u_i, v_k))|$$

$$\approx |\vec{x}_u(u_i, v_k)(u_{i+1} - u_i) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)(v_{k+1} - v_k)|$$

(Taylorreihe)
Die Oberfläche von Φ wird angenähert durch

$$\sum_i \sum_k |\vec{x}_u(u_i, v_k) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k =$$

$$= \sum_i \sum_k \sqrt{g(u_i, v_k)} \Delta u_i \Delta v_k$$

4.5.15 Def.: (Oberfläche eines Flächenstücks)

Sei $\Phi : \ \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine reguläre C^1-Fläche. Sei $D \subset G$ ein abgeschlossenes Gebiet und Ψ das zugehörige Flächenstück von Φ. Dann heißt

$$O := \int\int_D \sqrt{g}\ du\ dv$$

die Oberfläche von Ψ.

4.5.16 Bsp.: Oberfläche einer Drehfläche

Sei

$$m : \ \vec{m}(v) \ := \ \begin{pmatrix} r(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix},\ v \in I,$$

eine C^1-Kurve und

$$\Phi :\ \vec{x}(u,v) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{m}(v) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos u \cdot r(v) \\ \sin u \cdot r(v) \\ z(v) \end{pmatrix},\ (u,v) \in G := [0, 2\pi] \times I$$

eine **Drehfläche** mit dem **Meridian** m und der z-Achse als **Drehachse**.

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot r(v) \\ \cos u \cdot r(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \dot{r}(v) \\ \sin u \cdot \dot{r}(v) \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix}.$$

$g_{11} = \vec{x}_u^2 = r^2$, $g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v = 0, g_{22} = \vec{x}_v^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2$.

$$O = \int_0^{2\pi} \int_I r\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}\; dv\; du =$$

$$= 2\pi \int_I r\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}\; dv.$$

4.5.17 Bem.: In 4.5.16 wird O für Drehflächen zu einem Einfach-Integral.

4.5.18 Bem.: Die Meridiane und die **Breitenkreise** bilden auf jeder regulären C^1-Drehfläche ein orthogonales Netz.

4.6 Parametertransformation (PT)

4.6.1 Def.: Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine C^r-Fläche, $r \geq 1$.

Sei H ein Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und $f:\ H \to G$, f : $(\bar{u},\bar{v}) \mapsto (u,v)$, eine bijektive C^r-Abbildung.

Dann ist Φ : $\vec{x}(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$, $(\bar{u},\bar{v}) \in H$, eine (im allgemeinen andere) PD von Φ, und f heißt eine **PT** von Φ.

Ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix}$$

regulär, also

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \neq 0,$$

so heißt die PT **zulässig**.

4.6.2 Transformation des Tangentialraums

$$\vec{x}_{\bar{u}} = \vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}$$

$$\vec{x}_{\bar{v}} = \vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}$$

Sei

$$\vec{a} = a_1 \vec{x}_u + a_2 \vec{x}_v = \bar{a}_1 \vec{x}_{\bar{u}} + \bar{a}_2 \vec{x}_{\bar{v}}$$

Dann ist

$$\vec{a} = \bar{a}_1(\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}) + \bar{a}_2(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}).$$

Koeffizientenvergleich bei den linear unabhängigen Vektoren $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ liefert:

$$a_1 = \bar{a}_1 u_{\bar{u}} + \bar{a}_2 u_{\bar{v}},$$

$$a_2 = \bar{a}_1 v_{\bar{u}} + \bar{a}_2 v_{\bar{v}}.$$

Das sind Transformationsformeln für Flächenkoordinaten bei einer PT.

Die Parameter (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ sind gleichberechtigt. $\Rightarrow$

$$\bar{a}_1 = a_1 \bar{u}_u + a_2 \bar{u}_v,$$

$$\bar{a}_2 = a_1 \bar{v}_u + a_2 \bar{v}_v.$$

4.6.3 Transformation des Normalenvektors

$$\vec{x}_{\bar{u}} \times \vec{x}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}) \times (\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}) =$$

$$= \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot (u_{\bar{u}} v_{\bar{v}} - v_{\bar{u}} u_{\bar{v}}) =$$

$$= \vec{x}_u \times \vec{x}_v \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$$

4.6.4 Satz: Sei $\Phi : \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$,
eine reguläre C^r-Fläche in $\mathbb{E}^3$, $r \geq 1$,
$f : \ H \to G$,
$f : \ (\bar{u},\bar{v}) \mapsto (u,v) = (u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$
eine zulässige C^r-PT. Dann ist
$\vec{x}(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$ eine zul. C^r-PD von Φ.

4.6.4 Transformation der 1. Grundform

$$g_{\bar{1}\bar{1}} = \vec{x}_{\bar{u}}\vec{x}_{\bar{u}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}})(\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}}) =$$

$$g_{11}u_{\bar{u}}^2 + g_{12}(u_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + v_{\bar{u}}u_{\bar{u}}) + g_{22}v_{\bar{u}}^2 =$$

$$g_{11}u_{\bar{u}}^2 + 2g_{12}u_{\bar{u}}v_{\bar{u}} + g_{22}v_{\bar{u}}^2.$$

$$g_{\bar{1}\bar{2}} = \vec{x}_{\bar{u}}\vec{x}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{u}} + \vec{x}_v v_{\bar{u}})(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}) =$$

$$g_{11}u_{\bar{u}}u_{\bar{v}} + g_{12}(u_{\bar{u}}v_{\bar{v}} + v_{\bar{u}}u_{\bar{v}}) + g_{22}v_{\bar{u}}v_{\bar{v}}.$$

$$g_{\bar{2}\bar{2}} = \vec{x}_{\bar{v}}\vec{x}_{\bar{v}} = (\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}})(\vec{x}_u u_{\bar{v}} + \vec{x}_v v_{\bar{v}}) =$$

$$g_{11}u_{\bar{v}}^2 + g_{12}(u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + v_{\bar{v}}u_{\bar{v}}) + g_{22}v_{\bar{v}}^2 =$$

$$g_{11}u_{\bar{v}}^2 + 2g_{12}u_{\bar{v}}v_{\bar{v}} + g_{22}v_{\bar{v}}^2.$$

$$\bar{g} := \det\begin{pmatrix} g_{\bar{1}\bar{1}} & g_{\bar{1}\bar{2}} \\ g_{\bar{2}\bar{1}} & g_{\bar{2}\bar{2}} \end{pmatrix} = g \cdot \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}\right)^2$$

Für die letzte Gleichung verwendet man die Transformation des Normalenvektors und $|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{g}$.