3.8 Begleitendes Dreibein

Wir wollen längs der Kurve in jedem Punkt sinnvoll eine Basis anheften.

3.8.1 W-Punkte

Geg.: regul. C^2-Kurve $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$

$\vec{x}(s)$ heißt **W-Punkt** von $c :\Leftrightarrow \vec{x}\,''(s) = \vec{o}$.

3.8.2 Begleitendes Dreibein $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$

Vor.: c regul. C^2-Kurve, **W-Punkt-frei**.

$\vec{t}(s) := \vec{x}\,'(s)$ . . . der **Tangenten(einheits)vektor**
$\vec{n}(s) := \frac{\vec{x}\,''(s)}{|\vec{x}\,''(s)|}$ . . . der **Hauptnormalenvektor**
$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ . . . **Binormalenvektor**
jeweils von c an der Stelle s

$(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$ ist eine Rechts-ONB und heißt
das **begleitende Dreibein** (kurz: **3-Bein**) oder **Frenet-3-Bein** von c an der Stelle s.

$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{t}(s),\ v \in \mathbb{R}$ ... **Tangente**
$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{n}(s),\ v \in \mathbb{R}$ ... **Hauptnormale**
$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{b}(s),\ v \in \mathbb{R}$ ... **Binormale**

$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{t}(s) + w \cdot \vec{n}(s),\ v, w \in \mathbb{R}$
... **Schmiegebene**
$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{n}(s) + w \cdot \vec{b}(s),\ v, w \in \mathbb{R}$
... **Normal(en)ebene**
$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{t}(s) + w \cdot \vec{b}(s),\ v, w \in \mathbb{R}$
... **rektifizierende Ebene**
jeweils von c an der Stelle s.

3.8.3 HESSE-Form der Schmiegebene

σ von c an der Stelle s:

$$\sigma : \ \pm \vec{b}(s) \cdot (\vec{y} - \vec{x}(s)) = 0$$

Gleichung in $\vec{y}$.
Das Zeichen $+$ steht, falls $\vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s) \geq 0$.

3.8.4 Berechnung von $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ bei allgemeinem Parameter t

$$\vec{x}\,'' = (\dot{\vec{x}} \cdot \frac{dt}{ds})' = \ddot{\vec{x}}(\frac{dt}{ds})^2 + \dot{\vec{x}}\frac{d^2t}{ds^2} \Rightarrow$$

$$\vec{x}\,' \times \vec{x}\,'' = \dot{\vec{x}}\frac{dt}{ds} \times (\ddot{\vec{x}}(\frac{dt}{ds})^2 + \dot{\vec{x}}\frac{d^2t}{ds^2}) =$$

$$= \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} \cdot (\frac{dt}{ds})^3 \Rightarrow$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''}{|\vec{x}\,''|} =$$

$$= \frac{\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''}{|\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''|} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$$

Ergebnis:

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \quad \vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

3.8.5 Bsp: Schraublinie

$$c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ p \cdot t \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos t \\ -r \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} rp \cdot \sin t \\ -rp \cdot \cos t \\ r^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} p \cdot \sin t \\ -p \cdot \cos t \\ r \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} (-p^2 - r^2) \cdot \cos t \\ (-r^2 - p^2) \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r^2 + p^2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.9 Ableitungsgleichungen von FRENET

Vor.: $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$, eine reguläre C^3-Kurve, W-Punkt-frei.

Da $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, gibt es $a_{11}(s), a_{12}(s), \ldots, a_{33}(s)$, mit:

$$\vec{t}\,' = a_{11}\vec{t} + a_{12}\vec{n} + a_{13}\vec{b}$$

$$\vec{n}\,' = a_{21}\vec{t} + a_{22}\vec{n} + a_{23}\vec{b}$$

$$\vec{b}\,' = a_{31}\vec{t} + a_{32}\vec{n} + a_{33}\vec{b}$$

Aus $\vec{t}^2 = 1$ folgt $\vec{t}\vec{t}\,' = 0$, also $a_{11} = 0$.
Aus $\vec{n}^2 = 1$ folgt $\vec{n}\vec{n}\,' = 0$, also $a_{22} = 0$.
Aus $\vec{b}^2 = 1$ folgt $\vec{b}\vec{b}\,' = 0$, also $a_{33} = 0$.

Aus $\vec{t}\vec{n} = 0$ folgt $\vec{t}\,'\vec{n} + \vec{t}\vec{n}\,' = 0$, also $a_{12} + a_{21} = 0$.
Aus $\vec{t}\vec{b} = 0$ folgt $\vec{t}\,'\vec{b} + \vec{t}\vec{b}\,' = 0$, also $a_{13} + a_{31} = 0$.
Aus $\vec{n}\vec{b} = 0$ folgt $\vec{n}\,'\vec{b} + \vec{n}\vec{b}\,' = 0$, also $a_{23} + a_{32} = 0$.

3.9.1 Bem.: Die Matrix der a_{ik} ist schiefsymmetrisch, weil $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ eine ONB ist.

Weil $\vec{t} = \vec{x}\,'$, ist $\vec{t}\,' = \vec{x}\,'' =: \kappa\vec{n}$ mit $\kappa = |\vec{x}\,''|$ (siehe "Auf ihre Bogenlänge bezogene Kurven").

3.9.2 Die Ableitungsgleichungen von Frenet

$$\begin{aligned} \vec{t}\,' &= \qquad \kappa\vec{n} \\ \vec{n}\,' &= -\kappa\vec{t} \qquad + \tau\vec{b} \\ \vec{b}\,' &= \qquad - \tau\vec{n} \end{aligned}$$

3.9.3 Die "Krümmungen" einer Raumkurve

κ ... **Krümmung** von c
τ ... **Torsion** oder **Windung** von c
$\frac{1}{\kappa} =: \rho$ ... **Krümmungsradius** von c
$\frac{1}{\tau}$ ... **Torsionsradius** von c

3.9.3 Berechnung von τ:

$\vec{n} = \frac{\vec{x}''}{\sqrt{(\vec{x}'')^2}} \Rightarrow$

$$\vec{n}' = \frac{\sqrt{(\vec{x}'')^2} \cdot \vec{x}''' - \frac{2\vec{x}''\vec{x}'''}{2\sqrt{\vec{x}''^2}} \cdot \vec{x}''}{\vec{x}''^2}$$

$\vec{b} = \frac{\vec{x}' \times \vec{x}''}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|}$

$$\tau = \vec{n}' \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{\vec{x}''^2} \cdot \vec{x}''' \cdot (\vec{x}' \times \vec{x}'')}{\vec{x}''^2 |\vec{x}' \times \vec{x}''|}$$

Da $|\vec{x}' \times \vec{x}''| = |\vec{x}''|$ erhält man mit dem Spatprodukt:

$$\tau = \frac{\det(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''')}{\vec{x}''^2}$$

3.9.4 Satz: Für das begleitende Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ einer regulären W-Punkt-freien auf ihre Bogenlänge s bezogenen C^3-Raumkurve $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$, gelten die **Ableitungsgleichungen von Frenet** aus 3.9.2 mit

$$\kappa = |\vec{x}\,''| \text{ und } \tau = \frac{\det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'', \vec{x}\,''')}{\vec{x}\,''^2}.$$

3.9.5 Berechnung von κ, τ bei allgemeinem Parameter t

$$\kappa(s) = |\vec{x}\,''(s)|, \ \tau = \frac{\det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'', \vec{x}\,''')}{\vec{x}\,''^2}$$

$$\vec{x}\,' = \dot{\vec{x}} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{\vec{x}} \cdot \frac{1}{\dot{s}} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$$

$$\vec{x}\,'' = \ddot{\vec{x}} \cdot (\frac{1}{\dot{s}})^2 + \dot{\vec{x}} \cdot (\frac{1}{\dot{s}})'$$

$$\vec{x}\,''' = \dddot{\vec{x}} \cdot (\frac{1}{\dot{s}})^3 + \ddot{\vec{x}} \cdot (2(\frac{1}{\dot{s}})(\frac{1}{\dot{s}})' + (\frac{1}{\dot{s}})(\frac{1}{\dot{s}})') + \dot{\vec{x}}(\frac{1}{\dot{s}})''$$

$$\kappa = |\vec{x}\,''| = 1 \cdot |\vec{x}\,''| \cdot 1 = |\vec{x}\,'| \cdot |\vec{x}\,''| \cdot \sin \angle(\vec{x}\,', \vec{x}\,'') =$$

$$= |\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''| = \left|\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} \times \left(\frac{\ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^2} + \ldots\right)\right| =$$

$$= \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$$

Merkregel: Anzahl der Punkte in Zähler und Nenner!

$$\tau = \frac{\det\left(\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \frac{\ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^2} + \ldots, \frac{\dddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^3} + \ldots\right)}{\frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}{|\dot{\vec{x}}|^{3 \cdot 2}}} =$$

$$= \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$$

3.9.6 Satz: Ist $c:\ \vec{x}(t),\ t \in I$, eine reguläre W-Punkt-freie C^3-Raumkurve, so ist

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$$

3.9.7 Bsp.: Schraublinie

$$c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ p \cdot t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos t \\ -r \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin t \\ -r \cdot \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} rp \cdot \sin t \\ -rp \cdot \cos t \\ r^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}^2 = r^2 + p^2; \quad (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2 = r^2 \cdot (p^2 + r^2)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{r\sqrt{p^2 + r^2}}{(\sqrt{r^2 + p^2})^3} = \frac{r}{r^2 + p^2}$$

$$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = p \cdot \det \begin{pmatrix} -r\cos t & r\sin t \\ -r\sin t & -r\cos t \end{pmatrix} = pr^2$$

$$\tau(t) = \frac{pr^2}{r^2(p^2+r^2)} = \frac{p}{r^2+p^2}$$

3.10 Geometrische Eigenschaften von Raumkurven

3.10.1 Geometrische Deutung der Krümmung

Seien $\vec{x}\,'(s)$, $\vec{x}\,'(s+h)$ Tangenteneinheitsvektoren einer Kurve an "benachbarten Stellen" s und $s+h$.

$$\omega(h) := \angle(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,'(s+h))$$

$$\lim_{h\to 0} \ \omega(h) = 0 = \lim_{h\to 0} \ h$$

$$\frac{\sin\omega(h)}{h} = \left| \ \frac{\vec{x}\,'(s) \times (\vec{x}\,'(s+h) - \vec{x}\,'(s))}{h} \ \right|$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin\omega(h)}{h} = | \ \vec{x}\,'(s) \times \vec{x}\,''(s) \ | = \kappa(s)$$

Nach de L'Hôpital ist also

$$\kappa(s) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin \omega(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos \omega(h) \cdot \omega'(h)}{1} = \omega'(0)$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}\kappa(s) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin \omega(h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin \omega(h)}{\omega(h)} \cdot \frac{\omega(h)}{h} \\ &= 1 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h}\end{aligned}$$

Exakt: Die Krümmung $\kappa(s)$ ist der $\lim_{h\to 0}$ des Verhältnisses von $\angle(\vec{t}(s), \vec{t}(s+h))$ zu h.

Ungefähr: Die Krümmung κ ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom geradlinigen Verlauf.

3.10.2 Geometrische Deutung des Betrags der Torsion

$\sigma(s)$ ... Schmiegebene von c an der Stelle s

Analog zum Vorgehen bei der Krümmung zeigt man:

Exakt: Bis auf Vorzeichen ist die Torsion $\tau(s)$ der $\lim_{h\to 0}$ des Verhältnisses von $\angle(\sigma(s), \sigma(s+h))$ zu h.

Ungefähr: Die Torsion τ ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom ebenen Verlauf.

3.10.3 Schmiegebene als Grenzlage

$c\ :\ \vec{x}(s),\ \ s \in I$, eine W-Punkt-freie C^2-Kurve:

Skizze

Liegen $\vec{x}(s)$, $\vec{x}(s+h)$, $\vec{x}(s+k)$ nicht auf einer Geraden, so bestimmen sie eindeutig eine Ebene $\varepsilon(s,h,k)$, für die gilt: $\lim_{h,k\to 0}\varepsilon(s,h,k) = \sigma(s) =$ Schmiegebene von c an der Stelle s. (ohne Beweis)

Sprechweise: c berührt an der Stelle s die Schmiegebene $\sigma(s)$ **dreipunktig** oder **von zweiter Ordnung**.

3.10.4 Der Krümmungskreis

$c : \vec{x}(s),\ s \in I$, eine reguläre C^2-Kurve:

Liegen $\vec{x}(s)$, $\vec{x}(s+h)$, $\vec{x}(s+l)$ nicht auf einer Geraden, so bestimmen sie eindeutig einen Kreis $k(s,h,l)$, für den gilt: $\lim_{h,l\to 0} k(s,h,l)$, der **Krümmungskreis** von c an der Stelle s, existiert, wenn $\kappa(s) \neq 0$. Sein Mittelpunkt ist

$$\vec{m}(s) := \vec{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \vec{n}(s),$$

der **Krümmungsmittelpunkt** von c an der Stelle s.

Sprechweise: c berührt an der Stelle s den Krümmungskreis **dreipunktig** oder **von zweiter Ordnung**.

Vor.: c zusätzlich W-Punkt-frei.

Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte von c mit der PD $\vec{m}(s)$, $s \in I$, heißt die **Evolute** von c.

3.11 Hauptsatz der Kurventheorie

Vor.: I ein Intervall, $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $\kappa(s) > 0 \ \forall \ s \in I$, $\tau : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Beh.: Es gibt eine C^3-Kurve $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$, mit der Bogenlänge s, der Krümmung κ und der Torsion τ. Die Kurve ist eindeutig bestimmt bis auf gleichsinnige Bewegungen.

Bew.: ohne;

Skizze: Bei geg. κ und τ sind die Frenet-Gleichungen ein System von neun linearen Differentialgleichungen (**Dgln**) für die Koordinaten von $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$.
Nach einem Satz aus der Theorie der Dgln ist das System bei geg. Anfangswerten (**AWen**) eindeutig lösbar.

Man muss dann noch zeigen:
(1) Wählt man als AWe für $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ eine ONB, so bilden $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ auf ganz I eine ONB.
(2) Für $c : \vec{x}(t) := \int_{u_0}^{t} \ \vec{t}(u) \ du$ ist $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ ein begleitendes 3-Bein

3.12 Kurven mit konstanter Krümmung und Torsion

Hauptsatzes der Kurventheorie und Berechnung von Krümmung und Torsion der Schraublinie $\Rightarrow$ Jede Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa > 0$ und konstanter Torsion $\tau \in \mathbb{R}$ ist eine Schraublinie. Was ist noch zu zeigen?
Wir wissen: Für die Schraublinie gilt:

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + p^2}, \; \tau = \frac{p}{r^2 + p^2}$$

($r > 0$ Schraubradius, $p \in \mathbb{R}$ Schraubparameter)
$\Rightarrow \frac{p}{r} = \frac{\tau}{\kappa} \Rightarrow$

$$\kappa = \frac{\frac{1}{r}}{1 + (\frac{p}{r})^2} \Rightarrow r = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{p}{r})^2} =$$

$$= \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{\tau}{\kappa})^2} = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}$$

$$p = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2}$$

Damit ist zu geg. κ und τ die Schraublinie bestimmt.

$p = 0 \ldots$ Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa}$

3.13 Ebene Kurven

3.13.1 Raumkurven in einer Ebene

Eine W-Punkt-freie C^3-Kurve

$$c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$$

in $\mathbb{E}^3$ ist in einer Ebene enthalten $\Leftrightarrow$
$\tau = 0 \ \forall t \in I$.

Beweis: ($\Rightarrow$) Sei c in einer Ebene ε enthalten.
Dann sind $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$ und $\dddot{\vec{x}} \parallel \varepsilon$, also linear abhängig.
Daher ist $\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = 0$
und damit $\tau = 0$.

($\Leftarrow$) Sei $\tau = 0$.
c besitzt ein begleitendes Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$
mit $\vec{b}\,' = -\tau\vec{n} = \vec{o}$,
$\Rightarrow \vec{b}$ konstant.
Die Schmiegebene $\sigma(s)$ hat die Ebenengleichung

$$\vec{b}(s) \cdot \vec{y} - \vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s) = 0.$$

(Gleichung in $\vec{y}$)
$\vec{b}(s)$ ein Normaleneinheitsvektor und
$\vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s)$ ein vorzeichenbehafteter Abstand von $\sigma(s)$ vom Ursprung.

Noch zu zeigen: $\vec{b} \cdot \vec{x}(s)$ konstant.

$$\frac{d}{ds}\vec{b} \cdot \vec{x}(s) = \vec{o} \cdot \vec{x}(s) + \vec{b} \cdot \vec{t} = 0.$$

Daher ist $\sigma(s) =: \sigma$ konstant und c eine Kurve, die in einer Ebene liegt,
nämlich in der konstanten Schmiegebene σ.

3.13.2 Ebene Kurven als ebene Kurven

c eine Kurve in einer Ebene ohne umgebenden Raum: Man kann

- die Ebene orientieren durch Auszeichnung einer Rechts-Basis und
- die Kurve beschreiben durch eine PD mit zwei Koordinatenfunktionen.

Wir werden für ebene Kurven eine **vorzeichenbehaftete Krümmung** definieren.

3.13.3 Parameterdarstellung ebener Kurven

Sei $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ eine reguläre C^1-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Ein Tangentenvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

der Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\vec{t} := \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}},$$

der Hauptnormalenvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\vec{n}(t) := \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}.$$

Die Vektoren $(\vec{t}, \vec{n})$ bilden eine Rechts-ONB, das **begleitende Zweibein** von c.

3.13.4 Die Frenetschen Ableitungsgleichungen für ebene Kurven

Sei $c : \vec{x}(s) \quad (s \in I)$ eine reguläre C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle s:

$$\vec{t}(s) = \vec{x}\,'(s) = \begin{pmatrix} x\,'(s) \\ y\,'(s) \end{pmatrix},$$

Hauptnormalenvektor von c an der Stelle s:

$$\vec{n}(s) := \begin{pmatrix} -y\,'(s) \\ x\,'(s) \end{pmatrix}.$$

Da $\vec{x}\,'^2 = 1$ auf I, ist $\vec{x}\,'\vec{x}\,'' = 0$ auf I, also

$$\vec{x}\,'' = \vec{t}\,' =: \kappa\vec{n}.$$

Dabei heißt $\kappa(s)$ die **Krümmung** von c an der Stelle s.

In Koordinaten:

$$x\,'' = -\kappa y\,', \quad y\,'' = \kappa x\,'.$$

Frenet-Gleichungen für ebene Kurve:

$$\vec{t}\,' = \kappa\vec{n}, \quad \vec{n}\,' = -\kappa\vec{t}.$$

3.13.5 Vorzeichen der Krümmung einer ebenen Kurve

Sei $c : \vec{x}(s) \quad (s \in I)$ eine reguläre C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\kappa = \kappa \det(\vec{t}, \vec{n}) = \det(\vec{x}\,', \vec{x}\,''),$$

also

$$\kappa(s) = \det(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s)).$$

Die Krümmung $\kappa(s)$ einer regulären ebenen C^2-Kurve ist $\left\{ \begin{array}{c} > 0 \\ < 0 \end{array} \right\}$ $\Leftrightarrow$ Die Vektoren $(\vec{x}\,', \vec{x}\,'')$ bilden eine $\left\{ \begin{array}{c} \text{Rechtsbasis} \\ \text{Linksbasis} \end{array} \right\}$ $\Leftrightarrow$ Die Kurve c ist an der Stelle s $\left\{ \begin{array}{c} \text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt} \end{array} \right\}$.

Skizze

3.13.6 Die Krümmung einer ebenen Kurve bei allgemeinem Parameter

Sei $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ eine reguläre C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3}.$$

Beweis:

$$\frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{\det(\vec{x}\,' \cdot \dot{s}, \vec{x}\,''\dot{s}^2 + \vec{x}\,'\ddot{s})}{\dot{s}^3} = \det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'').$$

3.13.7 Der Hauptsatz der Kurventheorie für ebene Kurven

Seien I ein Intervall und $\kappa : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \kappa(s) \end{array} \right\}$ stetig. Dann gibt es bis auf gleichsinnige Bewegungen genau eine Kurve in der Ebene mit der Krümmung $\kappa(s)$ an jeder Stelle $s \in I$.

Beweis: Sei $\alpha(s)$ der Winkel, den $\vec{x}\,'(s)$ mit der positiven x-Achse einschließt. Dann ist

$$\vec{x}\,'(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(s) \\ \cos\alpha(s) \end{pmatrix} \cdot \alpha'(s).$$

Folglich ist

$$\alpha'(s) = \kappa(s),$$

also

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \alpha_0.$$

Damit ist

$$\vec{x}(s) = \int_{s_0}^{s} \begin{pmatrix} \cos(\int_{s_0}^{\sigma} \kappa(\tau)\mathrm{d}\tau + \alpha_0) \\ \sin(\int_{s_0}^{\sigma} \kappa(\tau)\mathrm{d}\tau + \alpha_0) \end{pmatrix} \mathrm{d}\sigma + \vec{x}_0$$

mit Integrationskonstanten α_0, $\vec{x}_0$.

Achtung: Die Bezeichnungen σ und τ haben nichts zu tun mit Schmiegebene oder Torsion.
Zu integrieren ist über s, aber s ist die obere Grenze des Integrals.
Daher die Bezeichnung der Integrationsvariablen mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben σ.
Der nächste Buchstabe im griechischen Alphabet ist τ.

3.13.8 Bem.: Aus einer vorgegebenen stetigen Krümmung lässt sich eine ebene Kurve bis auf ihre Lage eindeutig explizit berechnen (bis auf sogenannte Quadraturen = Integrationen).