3.6.3 Beispiele:

(1)

$$c : \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dabei: $a, b > 0$.
Es gilt:

$$(\frac{x_1(t)}{a})^2 + (\frac{x_2(t)}{b})^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Daher ist c in einer Ellipse enthalten.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \neq \vec{o}$$

c ist eine reguläre C^ω-Kurve, lokal einfach aber nicht einfach (da 2π-periodisch).

$$\dot{\vec{x}}(t)^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$$

Die Bogenlänge führt auf ein elliptisches Integral, nicht elementar auswertbar.

(2)

$$c : \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi[$$

Dabei: $a, b > 0$.
c ist einfach

Skizze mit Punkten $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$*.*

c ist die ganze Ellipse.

(3)

$$c : \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dabei: $a, b > 0$.

Skizze der Graphen von cosh *und von* sinh *im selben KS*

Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Folglich ist

$$(\frac{x_1(t)}{a})^2 - (\frac{x_2(t)}{b})^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Daher ist c in einer Hyperbel enthalten.

Skizze

c ist ein Hyperbelast!

3.7 Bogenlänge als Funktion des Parameters

Sei $c : \vec{x}(t),\ t \in I$, eine **reguläre** C^1-Kurve und $a \in I$.

Sei
$$s(t) := \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)|\ d\tau.$$

Dann ist $\dot{s}(t) = |\dot{\vec{x}}(t)| > 0\ \forall t \in I$, also die Abb. $s : I \to J$, $s : t \mapsto s(t)$ streng monoton zunehmend und stetig (sogar C^1). Folglich ist sie umkehrbar auf J. Es gibt $f : J \to I,\ s \mapsto f(s) = t$. Damit ist $c : \vec{x}(f(s)),\ s \in J$, auf die Bogenlänge als Parameter bezogen. Die PD mit der Bogenlänge als Parameter ist eindeutig bis auf die Anfangsstelle und die Orientierung.

Weil $\dot{s}(t) \neq 0\ \forall t \in I$, ist $f \in C^1(J)$ und
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$$

Damit ist fast schon gezeigt:

3.7.1 Satz: Jede reguäre C^r-Kurve ($r \geq 1$) lässt sich auf ihre Bogenlänge als Parameter beziehen. Diese PT ist zulässig. Die PD mit der Bogenlänge ist eine C^r-PD.

3.7.2 Bem.: Der letzte Satz ist ein Existenzsatz. Es ist in der Regel nicht möglich, die Parametrisierung mit der Bogenlänge explizit anzugeben, aus zwei Gründen:

Das Integral

$$s(t) := \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)| d\tau$$

lässt sich i. allg. nicht explizit auswerten.

Die Abb. $t \mapsto s(t)$ lässt sich i. allg. nicht explizit umkehren.

3.8 Auf ihre Bogenlänge bezogene Kurven

Die Bogenlänge als Kurvenparameter wird mit s bezeichnet, wenn nichts anderes vereinbart ist.

Die Ableitung nach s wird mit einem Strich ' bezeichnet.

Die Bogenlänge s heißt auch **natürlicher Parameter**.

Es gilt:

$$\vec{x}\,'(s) = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$$

Stets ist

$$|\vec{x}\,'| = 1, \qquad (1)$$

also

$$\vec{x}\,'^2 = 1. \qquad (2)$$

Ableiten von (2) liefert nach Division durch 2:

$$\vec{x}\,'\vec{x}\,'' = 0. \qquad (3)$$

3.7.1 Bem.: Da Formeln unter Verwendung der Bogenlänge besonders einfach werden, entwickeln wir die Theorie der Kurven unter Verwendung der Bogenlnnge als Parameter.

3.7.2 Bsp.: Schraub(en)linie

$$c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ pt \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, \text{ mit } r > 0,$$

$p \in \mathbb{R}$ ist PD einer Schraublinie. Diese kann in sich bewegt (verschraubt) werden.

t . . . **Schraubwinkel**
p . . . **Schraubparameter**
r . . . **Schraubradius**

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ p \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = r^2 + p^2 > 0$$

c ist eine reguläre C^ω-Kurve.

Bogenlänge mit Anfangsstelle $t = 0$:

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{x}}(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{r^2 + p^2}\, d\tau =$$

$$= \sqrt{r^2 + p^2} \cdot t$$

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

PD von c mit der Bogenlänge s:

$$c : \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}} \\ r \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}} \\ \frac{p \cdot s}{\sqrt{r^2+p^2}} \end{pmatrix}$$

Spezialfall: $p = 0 \ldots$ **Kreis** mit Radius r:

$$c : \ \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \frac{s}{r} \\ r \cdot \sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$