3 Kurven

3.1 Beispiele

Kreis in der Ebene:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Das ist eine implizite Gleichung: **implizite Darstellung**.

Mittelpunkt (0,0)

Radius $r > 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Das ist eine **Parameterdarstellung**, kurz: eine **PD**.

Parameter $t \in \mathbb{R}$ oder $t \in [0, 2\pi[$ oder $t \in]-\pi, \pi]$, je nachdem.

Skizze: xy-Koordinatensystem, Kreis um Ursprung (0,0) mit Radius r, Punkt auf Kreislinie mit den Koordinaten $r \cdot \cos t$ und $r \cdot \sin t$, Winkel t

Kreis mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$?

PD:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

implizit:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Beachte die Minuszeichen!

3.2 Zum Kurvenbegriff

3.2.1 Def.: Eine (C^r-)**Kurve** c ($r \geq 0$) im Sinn der Differentialgeometrie ist im $\mathbb{R}^n$ (z.B. $n = 2$ oder $n = 3$)
gegeben durch eine C^r-Abbildung $\vec{x} : I \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} : t \mapsto \vec{x}(t)$ eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in den R^n.

t ... ein **Parameter** von c
$\vec{x}$ ... eine **Parameterdarstellung** von c
I ... **Parameterintervall**

t ... tempus, temps, time

Schreibweise: $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$

3.2.2 Bsp.: Gerade

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}, \ t \in \mathbb{R}$
Dabei: $\vec{v} \neq \vec{o}$

3.2.3 Bsp.: Strecke

$\vec{x} = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}), \ t \in [0,1]$
Dabei: $\vec{b} \neq \vec{a}$

3.2.3 Bsp.: Ein Halbkreis

Skizze: xy-Koordinatensystem, obere Hälfte eines Kreises um den Ursprung mit Radius r

a) $x = t$

$y = \sqrt{r^2 - t^2}, \quad -r \leq t \leq r$

b) $x = r \cos u$

$y = r \sin u, \quad 0 \leq u \leq \pi$

3.2.4 Geschlossene Kurven

Eine Kurve $c : \vec{x}(t), t \in [a, b]$, mit $\vec{x}(a) = \vec{x}(b)$ heißt eine **geschlossene Kurve**.

3.2.5 Reguläre Kurven

Sei $c : \ \vec{x}(t), \ t \in I$, eine C^1-Kurve. Ein $t_0 \in I$ mit $\dot{\vec{x}}(t_0) \neq \vec{o}$ heißt eine **reguläre Stelle** von c.

Skizze: Warum nicht regulärer Punkt?

Sind alle $t \in I$ reguläre Stellen von c, so heißt c **regulär**, die PD heißt **zulässig**.

3.2.6 Einfache Kurven

Ist $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$, regulär, $v \in I$, und $\vec{x}(u) \neq \vec{x}(v)$ für alle $u \neq v$, so heißt $\vec{x}(v)$ ein **einfacher (Kurven-)Punkt** von c. Sind alle Punkte von c einfach, so heißt c eine **einfache Kurve**.

Vorsicht: "einfach" in der Literatur nicht einheitlich!

Ist $\vec{x}(u) = \vec{x}(v)$ mit $u \neq v$, so heißt $\vec{x}(u)$ ein **Doppelpunkt** von c.

3.3. Satz: Lokale Einfachheit regulärer Kurven

Sei $c: \ \vec{x}(t), t \in I$, eine C^1-Kurve und $t_0 \in I$ eine reguläre Stelle von c. Dann gibt es ein offenes Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J$, so dass gilt: $c: \ \vec{x}(t), t \in J$, ist einfach.

Bew.: t_0 regulär $\Rightarrow\ \dot{\vec{x}}(t_0) \neq \vec{o} \Rightarrow$ Für ein k gilt: $\dot{x}_k(t_0) \neq 0\ =$ (Stetigkeit von $\dot{x}_k$) $\Rightarrow$ Es gibt ein Intervall $J \subset I$ mit $t_0 \in J:\ \dot{x}_k(t) \neq 0\ \forall\ t \in J$. Damit ist c regulär auf J.

Wegen der Stetigkeit von $\dot{x}_k$ gilt:
Entweder $\dot{x}_k(t) > 0\ \forall\ t \in J$
oder $\dot{x}_k(t) < 0\ \forall\ t \in J \quad \Rightarrow$
x_k ist streng monoton $\left\{ \begin{array}{c} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{array} \right\}$ auf J
$\Rightarrow x_k(u) \neq x_k(v)\ \forall\ u,v \in J$ mit $u \neq v$
$\Rightarrow \vec{x}(u) \neq \vec{x}(v)\ \forall\ u,v \in J$ mit $u \neq v$

3.4 Wechsel der Parametrisierung

3.4.1 Def.: Sei $c:\ \vec{x}(t),\ t\in I$, eine C^r-Kurve ($r\geq 0$) und $J\subset\mathbb{R}$ ein Intervall sowie $f:J\to I$ eine bijektive C^r-Funktion. Dann ist $\vec{y}(u):=\vec{x}(f(u)),\ u\in J$, eine PD derselben C^r-Kurve c. (Das ist eine Vereinbarung!) Die Abb. f heißt eine C^r-**Parametertransformation** (**PT**).
Ist $r\geq 1$ und $\dot{f}(u)\neq 0\ \forall\ u\in J$, so heißt f C^r-**zulässig**.
Ist f zulässig, so ist entweder $\dot{f}(u)>0\ \forall\ u\in J$, und f heißt **gleichsinnig**, oder es ist $\dot{f}(u)<0\ \forall\ u\in J$, und f heißt **gegensinnig**.

In der Differentialgeometrie (**DG**) ist es sinnvoll und üblich, bei verschiedenen PD derselben Kurve die Parameter durch verschiedene Buchstaben zu bezeichnen.

3.4.2 Satz: Sei $c: \ \vec{x}(t),\ t \in I$, eine reguläre C^r-Kurve, $f: J \to I,\ f(u) = t$ eine C^r-zulässige PT. Dann ist $\vec{y}(u) := \vec{x}(f(u)),\ u \in J$, eine zulässige C^r-PD einer Kurve.

Bew.: Kettenregel aus der Analysis:
$u \mapsto \vec{y}(u) = \vec{x}(f(u))$ ist eine C^r-Funktion.
$\dot{\vec{y}}(u) = \text{(Kettenregel)} = \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$.
$\dot{\vec{x}}(f(u)) \neq \vec{o}$ und $\dot{f}(u) \neq 0 \Rightarrow \ \dot{\vec{y}}(u) \neq \vec{o}$.
Insgesamt: $\vec{y}$ ist zulässig.

3.4.3 Vereinbarung: Zwei zulässige C^r-PDen beschreiben **dieselbe Kurve**, wenn eine aus der anderen hervorgeht durch eine C^r-zulässige PT.

3.5 Geometrische Eigenschaften von Kurven

3.5.1 Def.: Eine Eigenschaft (eine Größe) einer Kurve heißt **geometrisch**, wenn sie unabhängig ist von der PD und vom KS.

3.5.2 Bem.: Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft geometrisch ist, zeigt man die Invarianz gegenüber PTen (manchmal nur gegenüber gleichsinnigen) und gegenüber KTen (manchmal nur gegenüber gleichsinnigen).

3.5.3 Tangentenvektor, Tangenteneinheitsvektor, Tangente

Skizze

Sei $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$, eine C^1-Kurve und $t \in I$ eine reguläre Stelle von c. Dann ist $\dot{\vec{x}}(t)$ **ein Tangentenvektor** von c an der Stelle t und

$$\frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$$

der Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle t.

Die Gerade $g: \vec{y} = \vec{x}(t) + v\dot{\vec{x}}(t),\ v \in \mathbb{R}$, heißt die **Tangente** von c an der Stelle t.

3.5.4 Bogenlänge einer C^1-Kurve

3.5.4.1 Geometrische Überlegung:

Skizze: Kurve mit Teilpunkten $\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \ldots, \vec{x}(t_{n-1}), \vec{x}(t_n)$

$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$

Ein einer Kurve einbeschriebener Polygonzug hat die Länge

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} \cdot (t_i - t_{i-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})|}{\Delta t_i} \cdot \Delta t_i$$

3.5.4.2 Def.: Eine C^1-Kurve $c:\ \vec{x}(t),\ t \in [a,b]$, hat die **Bogenlänge**

$$\int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)|\ dt.$$

3.5.4.3 Bem.: Man kann zeigen:

$$\lim_{n\to\infty,\ t_i - t_{i-1}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})|}{\Delta t_i} \cdot \Delta t_i =$$

$$= \int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)|\ dt,$$

aber das ist komplizierter als man denkt. o.B.

3.6 Verhalten des Tangentenvektors bei KTen und PTen

Eine KT, die kart. (Punkt-)Koordinaten $\vec{x}$ in kart. Koordinaten $\vec{y}$ überführt, hat die Gestalt:

$$\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$$

mit einer orthogonalen Matrix A (d.h. $A^T A = E =$ Einheitsmatrix) und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$ die Raumdimension).

Transformation von Vektorkoordinaten $\vec{v}$ in $\vec{w}$:

$$\vec{w} = A\vec{v}.$$

Geg.: C^1-Kurve $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$, und kart. KT $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$ sowie zul. C^1-PT $f: J \to I$.

Auswirkung der KT:

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\dot{\vec{x}}(t)$$

Auswirkung der PT:

$$\vec{z}(u) := \vec{x}(f(u))$$

Dann ist

$$\dot{\vec{z}}(u) = (\text{Kettenregel}) = \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$$

3.6.1 Satz: Der Begriff Tangenteneinheitsvektor ist ein geometrischer Begriff bezüglich gleichsinniger zulässiger PTen. Der Begriff Tantente ist ein geometrischer Begriff bezüglich zulässiger PTen.

Bew.: Bezüglich KTen gilt: $\dot{\vec{x}}(t)$ transformiert sich wie ein Vektor. Da A orthogonal, ist $|\dot{\vec{y}}(t)| = 1$.

Bezüglich PTen gilt:

$$\frac{\dot{\vec{z}}(u)}{|\dot{\vec{z}}(u)|} = \frac{\dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)}{|\dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)|} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} \cdot \operatorname{sgn}(\dot{f}(u))$$

Die Tangente $g: \vec{w} = \vec{x}(t) + v\dot{\vec{x}}(t),\ v \in \mathbb{R}$, wird zu $A\vec{z}(u) + \vec{b} + vA\dot{\vec{z}}(u),\ v \in \mathbb{R}$. Da $A\vec{z}(u) + \vec{b} = \vec{x}(t)$ und da $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\dot{\vec{z}}(u)$ l.a. sind, ist die Tangente also invariant.

3.6.2 Satz: Die Bogenlänge ist geometrisch bezüglich gleichsinniger zulässiger PTen.

Bew.: Geg.: C^1-Kurve $c:\ \vec{x}(t),\ t \in [a,b]$,
PT $f: [c,d] \to [a,b]$ mit $\dot{f} > 0$
und KT $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$.
$c: \vec{y}(u) = A\vec{x}(f(u)) + \vec{b}$.
$\dot{\vec{y}}(u) = A \cdot \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$
Da A orthogonal:
$|\dot{\vec{y}}(u)| = |\dot{\vec{x}}(f(u))||\dot{f}(u)|$

$$\int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt = \int_{f(c)}^{f(d)} |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt = \int_c^d |\dot{\vec{x}}(f(u))|\dot{f}(u)du =$$

$$\int_c^d |\dot{\vec{y}}(u)|\ du$$

Verwendet: Substitutionsregel für Integrale und $\dot{f}(u) > 0$