Prof. Dr. Johann Hartl
Zentrum Mathematik
TU München

SS 2015

Geometrie für Geodäsie und Geoinformation

Merkblatt: Ermittlung der Gestalt eines Kegelschnitts

Geg.: Gleichung eines Kegelschnitts k in der Ebene bezüglich eines kartesischen xy-Koordinatensystems:

$$k : ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$$

mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Falls $a = b$ und $c = 0$: Kreis mit Radius $r > 0$ oder Doppelpunkt oder $\emptyset$. Weitere Ermittlung durch quadratische Ergänzung. Fertig.

Andernfalls weiter:

1. Schritt: Schreibe die Gleichung in der Gestalt:

$$\vec{x}^T A\vec{x} + 2\vec{v}^T\vec{x} + f = 0 \qquad (*)$$

mit $\vec{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und symmetrischer Matrix A.

2. Schritt: Ermittle die Eigenwerte von A und nenne einen nichtverschwindenden davon λ_1, den anderen λ_2.

3. Schritt: Ermittle von A Eigenvektoren $\vec{t_1}$ zum Eigenwert λ_1 und $\vec{t_2}\,'$ zum Eigenwert λ_2.

4. Schritt: Falls $\det(\vec{t_1}, \vec{t_2}\,') < 0$, setze $\vec{t_2} := -\vec{t_2}\,'$, sonst $\vec{t_2} := \vec{t_2}\,'$.

5. Schritt: Normiere $\vec{t_1}$ zu $\vec{t_1}^{\,0}$ und $\vec{t_2}$ zu $\vec{t_2}^{\,0}$.

6. Schritt: $T := (\vec{t_1}^{\,0}, \vec{t_2}^{\,0})$.

7. Schritt: Setze in (*) $\vec{x} =: T\vec{x}^*$ ein mit $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$.

Das gibt eine neue Kegelschnittgleichung der Gestalt:

$$\lambda_1 {x^*}^2 + \lambda_2 {y^*}^2 + 2d^*x^* + 2e^*y^* + f = 0.$$

8. Schritt: Eliminiere d^* durch quadratische Ergänzung: $x^{**} := x^* + \frac{d^*}{\lambda_1}$

Das gibt eine neue Kegelschnittgleichung der Gestalt:

$$\lambda_1 {x^{**}}^2 + \lambda_2 {y^*}^2 + 2e^*y^* + f^* = 0.$$

Falls $\lambda_2 = 0$ liegt vor:

a) eine Parabel, falls $e^* \neq 0$,

b) ein Paar paralleler Geraden, falls $e^* = 0$ und $\lambda_1 f^* < 0$,

c) eine Doppelgerade, falls $e^* = 0$ und $f^* = 0$,

d) die leere Menge, falls $e^* = 0$ und $\lambda_1 f^* > 0$. Fertig.

Falls $\lambda_2 \neq 0$:

9. Schritt: Eliminiere e^* durch quadratische Ergänzung: $y^{**} := y^* + \frac{e^*}{\lambda_2}$

Das gibt eine neue Kegelschnittgleichung der Gestalt:

$$\lambda_1 {x^{**}}^2 + \lambda_2 {y^{**}}^2 + f^{**} = 0.$$

Falls $f^{**} \neq 0$, liegt vor:

a) eine Hyperbel, falls $\lambda_1\lambda_2 < 0$,

b) eine Ellipse, falls $\lambda_1\lambda_2 > 0$und $\lambda_1 f^{**} < 0$,

c) die leere Menge, falls $\lambda_1\lambda_2 > 0$und $\lambda_1 f^{**} > 0$. Fertig.

Falls $f^{**} = 0$, liegt vor:

a) eine schneidendes Geradenpaar, falls $\lambda_1\lambda_2 < 0$,

b) ein Doppelpunkt, falls $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Fertig.

Hinweis zur Verwendung des Merkblatts:

Um die Gestalt eines Kegelschnitts zu ermitteln, führt man von den Schritten nur diejenigen aus, die nötig sind. Ist eine Kegelschnittgleichung schon in spezieller Form gegeben, so fängt man nicht mit Schritt 1 an sondern mit einem späteren Schritt.

Beispiel:

Gegeben ist die Gleichung

$$4x^2 + 9y^2 + 4x = 0.$$

Was für ein Kegelschnitt ist dadurch gegeben?

Lösung:

Da in der allgemeinen Kegelschnittgleichung nicht $a = b$ gilt, geht es weiter nach "andernfalls".

Die Gleichung ist bereits von der Gestalt, die man nach dem Merkblatt mit dem 7. Schritt erreicht. Daher geht es weiter mit dem 8. Schritt.

Quadratische Ergänzung:

$$x^* := x + \frac{1}{2}.$$

Das liefert

$$4(x + \frac{1}{2})^2 + 9y^2 - 4 \cdot (\frac{1}{2})^2 = 0.$$

Dabei habe ich statt x^* einfach $x + \frac{1}{2}$ geschrieben, um gleich die Lage des Kegelschnitts im alten Koordinatensystem zu sehen. Noch deutlicher:

$$4(x - (-\frac{1}{2}))^2 + 9y^2 - 1 = 0.$$

Da $\lambda_2 = 9 \neq 0$ ist, geht es weiter nach Schritt 9. Aber da ist nichts zu tun, weil y nicht linear vorkommt. Wir haben schon die Gestalt der Kegelschnittsgleichung nach dem 9. Schritt. Dabei ist $f^{**} = -1 \neq 0$. Da $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4 \cdot 9 > 0$ und $\lambda_1 \cdot f^{**} = 4 \cdot (-1) < 0$, liegt Fall b) vor, also eine Ellipse.

Die Ellipse hat den Mittelpunkt $(-\frac{1}{2}, 0)$ und die Halbachsen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$.