Prof. Dr. Johann Hartl
Zentrum Mathematik
TU München

SS 2015

Geometrie für Geodäsie und Geoinformation

Aufgabenblatt 03

1. Eine Fläche Φ sei gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] =: G$ mit

$$\vec{x}(u,v) := \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}.$$

a) Beschreiben Sie die u-Linien und die v-Linien in Worten.

Lösung:

Die u-Linien sind Hyperbeläste in Ebenen, welche die x_3-Achse enthalten.
Die v-Linien sind Kreise mit Radius $\cosh u$ in Ebenen mit der Gleichung $z_3 = \sinh u$ senkrecht zur x_3-Achse.

b) Geben Sie eine Gleichung der Fläche Φ an. Zu welcher bekannten Klasse von Flächen gehört Φ?

Da $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ und $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, gilt:

$$\Phi : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$$

Φ ist ein einschaliges Drehhyperboloid.

c) Was ist die maximale Differenzierbarkeitsklasse von Φ?

Lösung:

Da cosh, sinh, cos und sin analytische Funktionen sind, ist Φ eine C^ω-Fläche.

d) Ist die Fläche Φ regulär?

Lösung:

$$\vec{x}_u := \begin{pmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ \cosh u \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v := \begin{pmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus $\alpha\vec{x}_u + \beta\vec{x}_v = \vec{o}$ folgt wegen der dritten Koordinate und wegen $\cosh u \geq 1$: $\alpha = 0$.
Wegen $\vec{x}_v^2 = \cosh^2 u \geq 1$ folgt dann $\beta = 0$. Folglich sind $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ linear unabhängig, und Φ ist regulär.

Alternativ:

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{pmatrix} -\cosh^2 u \cos v \\ -\cosh^2 u \sin v \\ \cosh u \sinh u \end{pmatrix} \neq \vec{o},$$

da die ersten beiden Koordinaten nicht gleichzeitig verschwinden können. $\Rightarrow$ Φ ist regulär.

e) Ist die Fläche Φ einfach?

Lösung:

Die Fläche Φ ist nicht einfach, da $\vec{x}(u,0) = \vec{x}(u,2\pi)$ für alle $u \in \mathbb{R}$, und damit auch für mindestens ein $u \in \mathbb{R}$.

f) Berechnen Sie die Fundamentalgrößen 1. Art g_{jk} von Φ für $j,k = 1,2$.

Lösung:

$g_{11} = \vec{x}_u^2 = \sinh^2 u + \cosh^2 u, g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v = 0, g_{22} = \vec{x}_v^2 = \cosh^2 u.$

g) Berechnen Sie die Determinante g der 1. Grundform von Φ.

Lösung:

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (\sinh^2 u + \cosh^2 u)\cosh^2 u$$

h) Berechnen Sie einen Normalenvektor von Φ an jeder Stelle $(u,v) \in G$.

Lösung:

Nach **d)** ist

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \cosh u \begin{pmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor von Φ an der Stelle (u,v).

i) Berechnen Sie den zur gegebenen Parametrisierung gehörenden Normaleneinheitsvektor von Φ.

Lösung:

Da $\cosh u > 0$, ist der zur gegebenen Parametrisierung gehörende Normaleneinheitsvektor von Φ an der Stelle (u,v) gleich

$$\begin{pmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}}.$$

j) Zeigen Sie: Die Parameterlinien bilden ein orthogonales Netz auf Φ.

Lösung:

Nach **f)** ist $g_{12} = 0$ für alle $(u,v) \in G$.

k) Berechnen Sie die Oberfläche desjenigen Teils von Φ, der zwischen den Ebenen mit den Gleichungen $z = 0$ und $z = \sinh 5$ liegt — bis auf die Auswertung von Integralen.

Lösung:

$$O = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \sqrt{g(u,v)}\ dv\ du = 2\pi \cdot \int_0^5 \sqrt{\sinh^2 u + \cosh^2 u} \cosh u\ du$$

Durch $u = u(t) = t$, $v = v(t) = t$ mit $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Flächenkurve c gegeben.

l) Berechnen Sie die Bogenlänge L von c bis auf die Auswertung von Integralen.

Lösung:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + \cosh^2 t}\ dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\sinh^2 t + 2\cosh^2 t}\ dt.$$

m) Berechnen Sie den Kosinus des Winkels von c gegenüber den u-Linien von Φ abhängig von t.

$$\cos\varphi = \frac{g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{I(\dot{u},\dot{v})}} = \frac{\cosh^2 t + \sinh^2 t}{\sqrt{(\sinh^2 t + \cosh^2 t)(\sinh^2 t + 2\cosh^2 t)}} =$$

$$\sqrt{\frac{\cosh^2 t + \sinh^2 t}{\sinh^2 t + 2\cosh^2 t)}}.$$

Durch $u = u(\bar{u},\bar{v}) = \mathrm{arsinh}\bar{u}$, $v = v(\bar{u},\bar{v}) = \bar{v}$ ist ein Parametertransformation f von Φ gegeben, die ein Gebiet H auf das Gebiet G bijektiv abbildet.

n) Geben Sie H an.

Lösung:

Da arsinh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, gilt:

$$H = G = \mathbb{R} \times [0, 2\pi].$$

o) Geben Sie die Parameterdarstellung $\vec{y}(\bar{u},\bar{v}) := \vec{x}(u(\bar{u},\bar{v}), v(\bar{u},\bar{v}))$ an.

Lösung:

Da $\bar{u} = \sinh u$ ist und $\cosh^2 u = \sinh^2 u + 1$, ist $\cosh^2 u = \bar{u}^2 + 1$ und $\cosh u = \sqrt{\bar{u}^2 + 1}$.

$$\vec{y}(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{u}^2+1}\cos\bar{v} \\ \sqrt{\bar{u}^2+1}\sin\bar{v} \\ \bar{u} \end{pmatrix}.$$

p) Ist die Parametertransformation f zulässig?

Lösung:

$$u_{\bar{u}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{u}^2+1}}, u_{\bar{v}} = 0, v_{\bar{u}} = 0, v_{\bar{v}} = 1 \Rightarrow$$
$$\det \begin{pmatrix} u_{\bar{u}} & u_{\bar{v}} \\ v_{\bar{u}} & v_{\bar{v}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\bar{u}^2+1}} > 0 \Rightarrow$$

Die Parametertransformation f ist zulässig und gleichsinnig.

q) Ist die Parametertransformation f gleichsinnig?

Lösung:

Ja, siehe **p)**

2. Eine Kugel Φ mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u,v) := r \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

wird in kanonischer Weise, das heißt durch gleiche Parameterwerte, abgebildet auf den Drehzylinder mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u,v) := r \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Ist diese Flächenabbildung α flächentreu, winkeltreu, längentreu?

Lösung::

Metrische Fundamentalgrößen der Kugel:

$$\vec{x}_u = r \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = r \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = \vec{x}_u^2 = r^2, g_{12} = 0, g_{22} = r^2 \cos^2 u$$

Metrische Fundamentalgrößen des Zylinders:

$$\vec{x}_u = r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v = r \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{11}^* = \vec{x}_u^2 = r^2 \cos^2 u, g_{12}^* = 0, g_{22}^* = r^2$$

Die metrischen Fundamentalgrößen der beiden Flächen stimmen nicht überein $\Rightarrow \alpha$ ist nicht längentreu.
Die metrischen Fundamentalgrößen der beiden Flächen sind nicht proportional $\Rightarrow \alpha$ ist nicht winkeltreu.

$$g = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = r^4 \cos^2 u = \det \begin{pmatrix} g^*_{11} & g^*_{12} \\ g^*_{21} & g^*_{22} \end{pmatrix} = g^* \Rightarrow$$

Die Flächenabbildung α ist flächentreu.