Prof. Dr. Johann Hartl
Zentrum Mathematik
TU München

SS 2015

Geometrie für Geodäsie und Geoinformation

Aufgabenblatt 02

1. Geben Sie eine Parametrisierung der Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ an.

Lösung:

$$c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Eine Neilsche Parabel ist der Graph der Funktion

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

a) Geben Sie eine Parametrisierung der Neilschen Parabel an, und zwar eine möglichst einfache.

Lösung:

$$d : \vec{y}(u) = \begin{pmatrix} u \\ \sqrt[3]{u^2} \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}$$

Damit ist d eine C^0-Kurve, weil $\vec{y}$ an der Stelle $u = 0$ nicht differenzierbar ist.

Einfachere Darstellung: Offenbar ist $y^3 = x^2$. Daher ist eine weitere Parameterdarstellung der Neilschen Parabel:

$$c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Damit ist c eine C^ω-Kurve.

Die Kurve d wird in die Kurve c transformiert durch die Parametertransformation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u = f(t) = t^3$.

b) Berechnen Sie in jedem regulären Punkt der Neilschen Parabel einen Tangentenvektor.

Lösung:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

c) Überlegen Sie sich, wie im singulären Punkt der Neilschen Parabel die Tangente liegt.

Lösung:

Im singulären Punkt $\vec{x}(t = 0)$ ist der Tangentenvektor $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{o}$ und die Tangente dadurch nicht eindeutig bestimmt. In allen anderen Punkten ist $\dot{\vec{x}}(t) \neq \vec{o}$. Wir bestimmen die Änderung von $\dot{\vec{x}}(0)$ zu $\dot{\vec{x}}(t)$ mit $t \neq 0$ aber t fast gleich 0.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\dot{\vec{x}}(t) - \dot{\vec{x}}(0)}{t - 0} = \ddot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 6t \\ 2 \end{pmatrix} |_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Tangente der Neilschen Parabel in ihrem singulären Punkt ist vertikal.

3. Gegeben sei die Kurve $c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$.

a) Ist die Kurve c regulär?

Lösung:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \neq \vec{o}, \quad t \in \mathbb{R}$$

c ist regulär.

b) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ in allen Punkten von c, in denen das möglich ist.

Lösung:

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t))}{|\dot{\vec{x}}(t)|^3}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6t \end{pmatrix}$$

$\dot{\vec{x}}(t)^2 = 1 + 9t^4$, $\det(\dot{\vec{x}}(t), \ddot{\vec{x}}(t)) = 6t$

$$\kappa(t) = \frac{6t}{\sqrt{1 + 9t^4}^3}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Sei c die Raumkurve in E^3 mit der Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4 - 3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Man bestimme

— die Bogenlänge s,

— das begleitende Dreibein $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ (Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalenvektor),

— die Krümmung κ und die Torsion τ

von c in Abhängigkeit von t.

Lösung:

Bogenlänge s:

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)| \, d\tau \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = 1 + 36t^2 + 18^2 t^4 = (1 + 18t^2)^2$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t (1 + 18\tau^2) \, d\tau = t + 6t^3$$

Begleitendes Dreibein ($\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$):

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+18t^2}$$

$$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 36t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -6t^2(36-18) \\ -36t \\ -6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2 = 36 \cdot (1+18t^2)^2 \quad \text{(wie bei } \dot{\vec{x}}^2\text{)}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+18t^2}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+18t^2)^2} =$$

$$\begin{pmatrix} -6t(18t^2+1) \\ (18t^2)^2 - 1 \\ 6t(18t^2+1) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+18t^2)^2} = \begin{pmatrix} -6t \\ 18t^2 - 1 \\ 6t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+18t^2}$$

Krümmung κ:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{6 \cdot (1+18t^2)}{(1+18t^2)^3} = \frac{6}{(1+18t^2)^2}$$

Torsion τ:

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}$$

$$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6t & -6 & 0 \\ 18t^2 & 36t & 36 \end{pmatrix} = -6 \cdot 36 \Rightarrow$$

$$\tau(t) = -\frac{6 \cdot 36}{36 \cdot (1+18t^2)^2} = -\kappa(t)$$