Prof. Dr. Johann Hartl
Zentrum Mathematik
TU München

SS 2015

Geometrie für Geodäsie und Geoinformation

Aufgabenblatt 01

1. Gegeben sei ein Kegelschnitt k durch die folgende Gleichung:

$$k : (2x - 3y + 4)^2 + 4(3x + 2y + 1)^2 = 1.$$

a) Geben Sie eine kartesische Koordinatentransformation an, um die Kegelschnittgleichung auf eine möglichst einfache Gestalt zu bringen, und charakterisieren Sie den Kegelschnitttyp.

Hinweis: Gehen Sie nicht nach einem Lösungsschema vor sondern schauen Sie sich die Kegelschnittgleichung an und versuchen Sie, einen einfachen Lösungsweg zu finden.

Lösung:

1. Möglichkeit: Ausmultiplizieren, zusammenfassen, auf Matrixform bringen, Merkblatt zur Hand nehmen und Schritte 1 bis 9 durchführen.

2. Möglichkeit: Kegelschnittgleichung anschauen.

$$g_1 : 2x - 3y + 4 = 0$$

$$g_2 : 3x + 2y + 1 = 0$$

Normalenvektor zu g_1: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Normalenvektor zu g_2: $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow g_1 \perp g_2$.

Setzt man

$$x^{**} := 2x - 3y + 4,$$
$$y^{**} := 3x + 2y + 1,$$

so stellt $x^{**} = 0$ die Gerade g_1 dar, und $y^{**} = 0$ die Gerade g_2.
Wir haben neue Koordinaten x^{**}, y^{**} eingeführt mit den zueinander orthogonalen Koordinatenachsen g_1, g_2.
Ist die Koordinatentransformation kartesisch?

$$\vec{x}^{**} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{=:U} \vec{x} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$U^T U = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Nein, aber $\frac{1}{\sqrt{13}} U$ ist orthogonal und hat Determinante + 1.
Eine kartesische Koordinatentransformation ist

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x - 3y + 4)$$

$$y^* = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x + 2y + 1)$$

Damit erhält k die Gleichung

$$k: 13x^{*2} + 52y^{*2} = 1.$$

Der Kegelschnitt k ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{1}{\sqrt{13}}$ und $\frac{1}{2\sqrt{13}}$.

b) Geben Sie gegebenenfalls den Mittelpunkt des Kegelschnitts an.

Lösung:

Mittelpunkt der Ellipse:
$0 = x^* = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x - 3y + 4) \Leftrightarrow 0 = 2x - 3y + 4 \qquad (1)$
$0 = y^* = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x + 2y + 1) \Leftrightarrow 0 = 3x + 2y + 1 \qquad (2)$
$2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) : 0 = 13x + 11 \Rightarrow x = -\frac{11}{13}$
$3 \cdot (1) - 2 \cdot (2) : 0 = -13y + 10 \Rightarrow y = \frac{10}{13}$
Der Mittelpunkt der Ellipse k hat die Koordinaten

$$M(x, y) = M(-\frac{11}{13}, \frac{10}{13}).$$

c) Geben Sie die Scheitel des Kegelschnitts an, also die Schnittpunkte mit den Symmetrieachsen.

Lösung:

$S_{1,2} : x^* = \pm\frac{1}{\sqrt{13}}, y^* = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 4 = \pm 1, 3x + 2y + 1 = 0 \Rightarrow$
$13x + 11 = \pm 2 \Rightarrow 13x = -11 \pm 2 \Rightarrow$
$x = -1, y = 1$ oder $x = -\frac{9}{13}, y = \frac{7}{13}$

$$S_1(x, y) = S_1(-1, 1), S_2(x, y) = S_2(-\frac{9}{13}, \frac{7}{13}).$$

$S_{3,4} : x^* = 0, y^* = \pm\frac{1}{2\sqrt{13}} \Rightarrow$
$2x - 3y + 4 = 0, \frac{1}{\sqrt{13}}(3x + 2y + 1) = \pm\frac{1}{2\sqrt{13}} \Rightarrow 6x + 4y + 2 = \pm 1 \Rightarrow$
$26x + 22 = \pm 3 \Rightarrow x = -\frac{19}{26}, y = \frac{11}{13}$ oder $x = -\frac{25}{26}, y = \frac{9}{13}$

$$S_3(x, y) = S_3(-\frac{19}{26}, \frac{11}{13}), S_4(x, y) = S_4(-\frac{25}{26}, \frac{9}{13}).$$

2. Gegeben sei der Kegelschnitt

$$k: x^2 + ay^2 + 2xy - 1 = 0$$

bezüglich eines kartesischen xy-Koordinatensystems in der Ebene.

a) Welche Gestalt hat der Kegelschnitt k? (Fallunterscheidung nach a!)

Lösung:

Wenn uns keine einfachere Möglichkeit einfällt, gehen wir nach dem Merkblatt vor:
Da $2 \neq 0$ ist k kein Kreis.
1. Schritt:

$$k: (xy)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 1 =: \vec{x}^T A\vec{x} - 1 = 0$$

2. Schritt:
Eigenwerte von A:
charakteristisches Polynom von A:

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & a-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-(1+a)\lambda+a-1$$

Nullstellen:

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\cdot(1+a\pm\sqrt{(1+a)^2-4(a-1)})=\frac{1}{2}\cdot(1+a\pm\sqrt{1+2a+a^2-4a+4})=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(1+a\pm\sqrt{1-2a+a^2+4})=\frac{1}{2}\cdot(1+a\pm\sqrt{(1-a)^2+4})$$

Versuch:

$$\lambda_1:=\frac{1}{2}\cdot(1+a+\sqrt{(1-a)^2+4}),\lambda_2:=\frac{1}{2}\cdot(1+a-\sqrt{(1-a)^2+4})$$

Ist das zulässig? Ist $\lambda_1>0$?
Für welche a ist $\lambda_1=0$?

$$1+a+\sqrt{(1-a)^2+4}=0\Leftrightarrow 1+a=-\sqrt{(1-a)^2+4}$$
$$\Rightarrow (1+a)^2=(1-a)^2+4\Leftrightarrow 4a=4\Leftrightarrow a=1$$

Notwendig für $\lambda_1=0$ ist also $a=1$.
Probe: Einsetzen von $a=1$ in λ_1 ergibt 2.
Also ist λ_1 nie 0 und folglich für alle a positiv.
Damit wissen wir, wie die quadratischen Glieder im 7. Schritt aussehen werden. Da in der Gleichung von k keine linearen Glieder vorkommen, kommen auch in der transformierten Gleichung keine linearen Glieder vor, und wir können weitermachen beim

7. Schritt: Mit $\vec{x}=:T\vec{x}^{\,*}$ erhält man:

$$\frac{1}{2}\cdot(1+a+\sqrt{(1-a)^2+4})x^{*2}+\frac{1}{2}\cdot(1+a-\sqrt{(1-a)^2+4})y^{*2}-1=0.$$

8. Schritt: Da in der Gleichung von k keine linearen Glieder aufgetreten sind, treten auch in der transformierten Gleichung keine linearen Glieder auf. Im 8. Schritt ist also nichts zu tun.

Wann ist $\lambda_2=0$?

$$1+a-\sqrt{(1-a)^2+4}=0\Leftrightarrow 1+a=\sqrt{(1-a)^2+4}$$
$$\Rightarrow (1+a)^2=(1-a)^2+4\Leftrightarrow 4a=4\Leftrightarrow a=1$$

Notwendig für $\lambda_2=0$ ist also $a=1$.
Probe: Einsetzen von $a=1$ in λ_2 ergibt 0.
Falls $a=1$:

$$k: 2x^{*2}-1=0$$

Dann ist k das Paar paralleler Geraden

$$x^*=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

9. Schritt: Da in der transformierten Gleichung keine linearen Glieder auftreten, ist wieder nichts zu tun.

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{4} \cdot ((1+a)^2 - (1-a)^2 - 4) = a - 1$$

Falls $a < 1$ ist k eine Hyperbel.
Da $-1 < 0$ und $\lambda_1 > 0$ gilt:
Falls $a > 1$ ist k eine Ellipse.

b) Die Gestalt von k erkennt man in einem $x^* y^*$-Koordinatensystem. Geben Sie $x^*(x, y)$ und $y^*(x, y)$ an.

bf Lösung:

3. Schritt: Eigenvektoren $\vec{t_1}$ und $\vec{t_2}\,'$ von A zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2:
$(A - \lambda_1 E)\vec{x} = \vec{o} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - a - \sqrt{(1-a)^2 + 4}) & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \cdot (-1 + a - \sqrt{(1-a)^2 + 4}) \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{o}$$

$$\vec{t_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(-1 + a + \sqrt{(1-a)^2 + 4}) \end{pmatrix}$$

$(A - \lambda_2 E)\vec{x} = \vec{o} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 - a + \sqrt{(1-a)^2 + 4}) & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \cdot (-1 + a + \sqrt{(1-a)^2 + 4}) \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{o}$$

$$\vec{t_2}\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(-1 + a - \sqrt{(1-a)^2 + 4}) \end{pmatrix}$$

4. Schritt:
Da $\det(\vec{t_1}, \vec{t_2}\,') = -\sqrt{(1-a)^2 + 4} < 0$:

$$\vec{t_2} := -\vec{t_2}\,' = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}(1 - a + \sqrt{(1-a)^2 + 4}) \end{pmatrix}$$

5. Schritt:

$$\vec{t_1}^{\,2} = 1 + \frac{1}{4}(-1 + a + \sqrt{(1-a)^2 + 4})^2 =$$

$$1 + \frac{1}{4}((-1+a)^2 + 2(-1+a)\sqrt{(1-a)^2 + 4} + (1-a)^2 + 4) =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2 - a + 1 + \frac{1}{2}(-1+a)\sqrt{(1-a)^2 + 4} =$$

$$\frac{1}{2}(5 + a^2 - 2a + (-1+a)\sqrt{(1-a)^2 + 4})$$

$$\vec{t_2}^{\,2} = 1 + \frac{1}{4}(1 - a + \sqrt{(1-a)^2 + 4})^2 =$$

$$1 + \frac{1}{4}((1-a)^2 + 2(1-a)\sqrt{(1-a)^2 + 4} + (1-a)^2 + 4) =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a^2 - a + 1 + \frac{1}{2}(1-a)\sqrt{(1-a)^2 + 4} =$$

$$\frac{1}{2}(5 + a^2 - 2a + (1-a)\sqrt{(1-a)^2 + 4})$$

$$\vec{t_1}^{\,0} = \sqrt{\frac{2}{5 + a^2 - 2a + (-1+a)\sqrt{(1-a)^2 + 4}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(-1 + a + \sqrt{(1-a)^2 + 4}) \end{pmatrix}$$

$$\vec{t_2}^{\,0} = \sqrt{\frac{2}{5 + a^2 - 2a + (1-a)\sqrt{(1-a)^2+4}}} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}(1 - a + \sqrt{(1-a)^2+4}) \end{pmatrix}$$

6. Schritt:

$$T := (\vec{t_1}^{\,0}, \vec{t_2}^{\,0}) \Rightarrow \vec{x} = T\vec{x}^{\,*}$$
$$\Rightarrow \vec{x}^{\,*} = T^{-1}\vec{x}$$