Prof. Dr. Johann Hartl
Zentrum Mathematik
TU München

SS 2015

Geometrie für Geodäsie und Geoinformation

Aufgabenblatt 03

1. Eine Fläche Φ sei gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi] =: G$ mit

$$\vec{x}(u,v) := \begin{pmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}.$$

- **a)** Beschreiben Sie die u-Linien und die v-Linien in Worten.
- **b)** Geben Sie eine Gleichung der Fläche Φ an. Zu welcher bekannten Klasse von Flächen gehört Φ?
- **c)** Was ist die maximale Differenzierbarkeitsklasse von Φ?
- **d)** Ist die Fläche Φ regulär?
- **e)** Ist die Fläche Φ einfach?
- **f)** Berechnen Sie die Fundamentalgrößen 1. Art g_{jk} von Φ für $j, k = 1, 2$.
- **g)** Berechnen Sie die Determinante g der 1. Grundform von Φ.
- **h)** Berechnen Sie einen Normalenvektor von Φ an jeder Stelle $(u,v) \in G$.
- **i)** Berechnen Sie den zur gegebenen Parametrisierung gehörenden Normaleneinheitsvektor von Φ.
- **j)** Zeigen Sie: Die Parameterlinien bilden ein orthogonales Netz auf Φ.
- **k)** Berechnen Sie die Oberfläche desjenigen Teils von Φ, der zwischen den Ebenen mit den Gleichungen $z = 0$ und $z = \sinh 5$ liegt — bis auf die Auswertung von Integralen.

Durch $u = u(t) = t$, $v = v(t) = t$ mit $t \in [0, 2\pi]$ ist eine Flächenkurve c gegeben.

- **l)** Berechnen Sie die Bogenlänge L von c bis auf die Auswertung von Integralen.
- **m)** Berechnen Sie den Kosinus des Winkels von c gegenüber den u-Linien von Φ abhängig von t.

Durch $u = u(\bar{u}, \bar{v}) = \operatorname{arsinh}\bar{u}$, $v = v(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{v}$ ist ein Parametertransformation f von Φ gegeben, die ein Gebiet H auf das Gebiet G bijektiv abbildet.

- **n)** Geben Sie H an.
- **o)** Geben Sie die Parameterdarstellung $\vec{y}(\bar{u}, \bar{v}) := \vec{x}(u(\bar{u}, \bar{v}), v(\bar{u}, \bar{v}))$ an.
- **p)** Ist die Parametertransformation f zulässig?
- **q)** Ist die Parametertransformation f gleichsinnig?

2. Eine Kugel Φ mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u,v) := r \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

wird in kanonischer Weise, das heißt durch gleiche Parameterwerte, abgebildet auf den Drehzylinder mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u,v) := r \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Ist diese Flächenabbildung α flächentreu, winkeltreu, längentreu?