Wir haben einige Eigenschaften von Ellipsen und Hyperbeln herausgefunden.

Das Koordinatensystem hatten wir der Kurve angepasst.

Dazu Skizze zu Ellipse und zu Hyperbel.

Was machen wir, wenn das Koordinatensystem nicht zur Kurve passt?

Skizze zu Ellipse.

Wir führen ein neues Koordinatensystem ein, das zur Kurve passt.

1. Hauptachsentransformation

1.1 Allgemeine Kegelschnittgleichung

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (*)$$

(Die Buchstaben a, b, c haben jetzt eine neue Bedeutung. Sie sind nicht mehr Halbachsen von Ellipsen oder Hyperbeln.)

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$!

1.2 Warum heißen die Kegelschnitte Kegelschnitte?

ebene Schnitte eines Drehkegels

Schrägbild

Normalprojektion in Ebene parallel zur Kegelachse

Nichtentartete Kegelschnitte:

Ellipse,

Hyperbel,

Parabel

Entartete Kegelschnitte

schneidendes Geradenpaar, dazu: paralleles Geradenpaar

Doppelgerade

Doppelpunkt

leere Menge $\emptyset$

Die Doppelgerade ist nichts anderes als eine Gerade, aber weil in der Gleichung Glieder zweiter Ordnung vorkommen, nennt man sie Doppelgerade.

Der Doppelpunkt ist nichts anderes als ein Punkt, aber weil in der Gleichung Glieder zweiter Ordnung vorkommen, nennt man ihn Doppelpunkt.

1.3 Einige spezielle Kegelschnittgleichungen

Gleichung einer Geraden: $px + qy + r = 0$

Gleichung einer Doppelgeraden:

$$0 = (px + qy + r)^2 =$$

$$= p^2x^2 + q^2y^2 + 2pqxy + 2prx + 2qry + r^2$$

Man sieht dem letzten Ausdruck nicht auf den ersten Blick an, dass er eine Doppelgerade beschreibt.

Gleichung eines Geradenpaares?

$$0 = (px + qy + r)(ux + vy + w) =$$

$$= pux^2 + qvy^2 + (pv + qu)xy + (ru + pw)x +$$

$$+ (rv + qw)y + rw$$

Gleichung eines Doppelpunktes z.B.?

$$0 = (px + qy + r)^2 + (ux + vy + w)^2$$

Wie sieht man einer Kegelschnittgleichung an, welchen Kegelschnitt sie beschreibt?

1.4 Kegelschnittgleichung mit Matrizen aufgeschrieben

Erinnerung:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0 \qquad (*)$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+f=0$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} =: A$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} =: \vec{v}^{\,T}$$

Allgemeine Kegelschnittgleichung.

$$\vec{x}^{\,T}A\vec{x}+2\vec{v}^{T}\vec{x}+f=0$$

Dabei $A \neq O$.

$\vec{x}^{\,T}A\vec{x}$ ... **quadratische Form** $(A^T = A)$

$\vec{v}^{T}\vec{x}$ ... **Linearform**

1.5 Jetzt Hauptachsentransformation

Wir ermitteln Eigenwerte (EWe) $\lambda_{1,2}$ und Eigenvektoren (EVen) $\vec{t}_{1,2} \neq \vec{o}$ von A:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \qquad (\vec{x} \neq \vec{o})$$

$$A\vec{x} = \lambda E\vec{x}$$

$$(E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots \textbf{Einheitsmatrix}$$

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o}$$

Notwendig für die Existenz nichttrivialer Lösungen:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$0 = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & c \\ c & b - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (a - \lambda)(b - \lambda) - c^2 =$$

$$= \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((a+b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4(ab - c^2)}) =$$

$$= \frac{1}{2}((a+b) \pm \sqrt{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2}) =$$

$$= \frac{1}{2}((a + b) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2}) =$$

$$= \frac{1}{2}((a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2})$$

Zwei verschiedene reelle EWe, außer für

$$a = b, c = 0.$$

Bei $a = b$, $c = 0$ ist (*) speziell

$$ax^2 + ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

oder

$$0 = x^2 + 2\frac{d}{a}x + y^2 + 2\frac{e}{a}y + \frac{f}{a} =$$

$$= x^2 + 2\frac{d}{a}x + (\frac{d}{a})^2 + y^2 + 2\frac{e}{a}y + (\frac{e}{a})^2 + \frac{f}{a} - (\frac{d}{a})^2 - (\frac{e}{a})^2 =$$

$$= (x + \frac{d}{a})^2 + (y + \frac{e}{a})^2 + \frac{f}{a} - (\frac{d}{a})^2 - (\frac{e}{a})^2$$

Anders aufgeschrieben:

$$(x - (-\frac{d}{a}))^2 + (y - (-\frac{e}{a}))^2 = (\frac{d}{a})^2 + (\frac{e}{a})^2 - \frac{f}{a}$$

Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt

$$M(-\frac{d}{a}, -\frac{e}{a}) =: M(m_1, m_2)$$

und Radius r mit

$$r^2 = (\frac{d}{a})^2 + (\frac{e}{a})^2 - \frac{f}{a},$$

falls $r^2 > 0$.

Doppelpunkt $M(m_1, m_2)$, falls $r^2 = 0$.

Leere Menge $\emptyset$, falls $r^2 < 0$, wenn wir nur reelle Punkte betrachten.

Jetzt weiter im Fall zweier verschiedener EWe $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$A-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}\sqrt{\ldots} & c \\ c & \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}\sqrt{\ldots} \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda_2 E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}\sqrt{\ldots} & c \\ c & \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}\sqrt{\ldots} \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} -c \\ \frac{1}{2}(a-b) - \frac{1}{2}\sqrt{\ldots} \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_2 = \begin{pmatrix} -c \\ \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}\sqrt{\ldots} \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = c^2 + \frac{1}{4}((a-b)^2 - ((a-b)^2 + 4c^2)) =$$

$$= c^2 - c^2 = 0$$

Die EVen $\vec{t}_1$ und $\vec{t}_2$ sind zueinander orthogonal und können im folgenden als normiert angenommen werden. Dann ist

$$(\vec{t}_1, \vec{t}_2) =: T$$

eine orthogonale Matrix.

Wir führen neue Koordinaten x^*, y^* ein durch

$$\vec{x} = T\vec{x}^* = T \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

Neue Gleichung des Kegelschnitts:

$$0 = (T\vec{x}^*)^T A T\vec{x}^* + 2\vec{v}^T T\vec{x}^* + f =$$

$$= (\vec{x}^*)^T T^T A T\vec{x}^* + 2\vec{v}^T T\vec{x}^* + f =$$

$$= (\vec{x}^*)^T (T^T A T)\vec{x}^* + 2(\vec{v}^T T)\vec{x}^* + f$$

Was ist $T^T AT$?

$$T^T AT = \begin{pmatrix} \vec{t}_1^T \\ \vec{t}_2^T \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{t}_1^T \\ \vec{t}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\vec{t}_1 & A\vec{t}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{t}_1^T \\ \vec{t}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{t}_1 & \lambda_2\vec{t}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben eine neue Kegelschnittgleichung:

$$\lambda_1(x^*)^2 + \lambda_2(y^*)^2 + 2\vec{v}^T T\vec{x}^* + f = 0$$

Abkürzung: $\vec{v}^T T =: (\vec{v}^*)^T := (d^*, e^*)$

Das haben wir erreicht durch eine Drehung des Koordinatensystems (KS).

War das wirklich eine Drehung?

Nur wenn $\det T = +1$!

Das erreichen wir gegebenenfalls durch Vertauschung der Spalten von T oder durch Multiplikation von $\vec{t}_1$ oder von $\vec{t}_2$ mit -1.

(Darauf achten wir in Zukunft schon weiter vorn.)

Wir setzen voraus: $\lambda_1 \neq 0$.

(Das erreichen wir gegebenenfalls schon weiter vorne durch Vertauschen von $\vec{t}_1$ und $\vec{t}_2$.)

$$\lambda_1(x^*)^2 + \lambda_2(y^*)^2 + 2d^*x^* + 2e^*y^* + f = 0$$

$$\lambda_1((x^*)^2+2\frac{d^*}{\lambda_1}x^*+(\frac{d^*}{\lambda_1})^2)+\lambda_2(y^*)^2+2e^*y^*$$

$$-\frac{(d^*)^2}{\lambda_1} + f = 0$$

$$\lambda_1(x^* + \frac{d^*}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y^*)^2 + 2e^*y^*$$

$$-\frac{(d^*)^2}{\lambda_1} + f = 0$$

Wir setzen

$x^*+\dfrac{d^*}{\lambda_1} =: x^{**}$ Verschiebung in x^*-Richtung

und

$$-\frac{(d^*)^2}{\lambda_1} + f =: f^*.$$

Neue Kegelschnittgleichung:

$$\lambda_1(x^{**})^2 + \lambda_2(y^*)^2 + 2e^*y^* + f^* = 0$$

1. Fall: $\lambda_2 = 0$, $e^* \neq 0$ ... **Parabel**

2. Fall: $\lambda_2 = 0$, $e^* = 0$ ... **Paar paralleler Geraden** falls $\lambda_1 f^* < 0$.
Doppelgerade, falls $\lambda_1 f^* = 0 \Leftrightarrow f^* = 0$
Leere Menge $\emptyset$, falls $\lambda_1 f^* > 0$

3. Fall: $\lambda_2 \neq 0$. Dann erhält man durch quadratische Ergänzung:

$$\lambda_1 x^{**2} + \lambda_2 y^{**2} + f^{**} = 0$$

Hyperbel, falls $\lambda_1\lambda_2 < 0, f^{**} \neq 0$
Ellipse, falls $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1 f^{**} < 0$

Leere Menge $\emptyset$, falls $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1 f^{**} > 0$ **Schneidendes Geradenpaar**, falls $\lambda_1\lambda_2 < 0, f^{**} = 0$. **Doppelpunkt**, falls $\lambda_1\lambda_2 > 0, f^{**} = 0$.