Zuletzt erarbeitet unter anderem:

Sei h die Menge aller Punkte X in der euklidischen Ebene, für die gilt:
Die Differenz der Abstände von X zu zwei verschiedenen gegebenen Punkten F_1 und F_2 ist gleich einer festen reellen Zahl $d > 0$.
Dann ist h eine **Hyperbel**.

Wählt man ein kartesisches xy-Koordinatensystem so, dass die x-Achse die Verbindungsgerade von F_1 und F_2 ist, und dass die y-Achse das Mittellot der Strecke $\overline{F_1F_2}$ ist, so hat man o.E. die Koordinaten $F_1(-c, 0)$ und $F_2(c, 0)$ mit $c > 0$.

Die Gleichung von h ist dann:

$$h : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit $a := \frac{d}{2}$ und $b := \sqrt{c^2 - a^2}$.

Die **Asymptoten** von h sind die beiden Geraden mit den Gleichungen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

oder

$$bx + ay = 0, \qquad bx - ay = 0.$$

Soweit die Wiederholung.

Erinnerung: Für die beiden Funktionen

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

gilt:

cosh ist eine **gerade Funktion**. Der Graph ist **achsensymmetrisch** bzgl. der y-Achse. sinh ist eine **ungerade Funktion**. Der Graph ist **punktsymmetrisch** bzgl. des Koordinatenursprungs.

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \sinh x = +\infty$$

$$\sinh 0 = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\cosh 0 = 1$$

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Skizzen dazu

Setzt man $x(t) := a\cosh t, \quad y(t) := b\sinh t$ für $t \in \mathbb{R}$, so erhält man Punkte $(x(t), y(t))$, für die gilt:

$$\frac{x(t)^2}{a^2} - \frac{y(t)^2}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Durch
$x(t) := a\cosh t, \quad y(t) := b\sinh t, \quad (t \in \mathbb{R})$
ist eine **Parameterdarstellung (PD) einer ebenen Kurve** gegeben, die enthalten ist in der Kurve mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also in einer Hyperbel h.

Beschreibt die PD ganz h?

Skizze

Erinnerung: Für die beiden Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ gilt:

cos ist eine **gerade Funktion**. Der Graph ist **achsensymmetrisch** bzgl. der y-Achse. sin ist eine **ungerade Funktion**. Der Graph ist **punktsymmetrisch** bzgl. des Koordinatenursprungs.
$\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Skizzen dazu am Einheitskreis und für die Graphen

Setzt man $x(t) := a\cos t,\ \ y(t) := b\sin t$ für $t \in \mathbb{R}$, so erhält man Punkte $(x(t), y(t))$, für die gilt:

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Durch
$x(t) := a\cos t, \quad y(t) := b\sin t, \quad (t \in \mathbb{R})$
ist eine **Parameterdarstellung (PD) einer ebenen Kurve** gegeben, die enthalten ist in der Kurve mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also in einer **Ellipse** e.

Beschreibt die PD ganz e?

Skizze

Auch
$x(t) := a\cos t, \quad y(t) := b\sin t, \quad (t \in [0, 2\pi])$
beschreibt die ganze Ellipse.

Auch
$x(t) := a\cos t, \quad y(t) := b\sin t, \quad (t \in [-\pi, \pi])$
beschreibt die ganze Ellipse.

Für $a = b = r$ hat man eine PD eines Kreises vom Radius r:
$x(t) := r\cos t, \quad y(t) := r\sin t, \quad (t \in [0, 2\pi])$.

Bezeichnungen: Kürzer schreiben wir z.B. auch: $x = a\cos t, y = b\sin t$.

Üblich ist auch eine **Vektorschreibweise**, z.B.:

$$\vec{x}\,(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad (t \in [0, 2\pi]).$$

Wir betrachten jetzt die **Ellipse als affines Kreisbild**: