Angewandte Geometrie

1. Die Kugel Σ mit dem Mittelpunkt $M(m, 0, 0)$ $(m > 0)$ auf der positiven x-Achse und dem Radius r wird um die (gerichtete) z-Achse verschraubt (Schraubparameter $p \neq 0$). Sei Φ die Hüllschraubfläche der Schraublagen von Σ. Man bestimme die Kurve q, längs der sich Φ und die Kugel Σ (in ihrer Anfangslage) berühren („Eingriffslinie“).

Lösung:

Kugel Σ: Mittelpunkt $M(m, 0, 0)$ $\quad (m > 0)$
Radius r
wird verschraubt mit
Schraubachse a: z-Achse (gerichtet)
Schraubparameter p $(\neq 0)$
Hüllschraubfläche Φ
Ges.: Eingriffslinie q

Die Bezeichnungen sind anders als in der Vorlesung. Formeln der Vorlesung sind also anzupassen.

Σ ist Drehfläche; was ist die Drehachse b?
Beliebig durch M, z.B. die x-Achse, aber dann können wir die Formeln der Vorlesung nicht verwenden. Dort war die x-Achse Gemeinlot von a und b. Daher $b \parallel y$-Achse oder $b \parallel z$-Achse (der Einfachheit halber).

Parameterdarstellung von b:

$$b : \vec{x}(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{q}=\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{r}=\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\rho \\ \sin\rho \end{pmatrix}}$$

(Unser m ist das c der Vorlesung, das ρ der Vorlesung ist 0.)

Breitenkreisradius $R(\lambda)$: $\lambda^2 + R(\lambda)^2 = r^2$ (Tafelskizze)

$$R(\lambda) = \sqrt{r^2 - \lambda^2} \qquad (-r \leq \lambda \leq r)$$

Parameterdarstellung von Σ analog zur Vorlesung:

$$\Sigma : \vec{z}(\lambda, \alpha) = (Vorl.) = \begin{pmatrix} c + R\cos\alpha \\ \lambda\cos\rho + R\sin\rho\sin\alpha \\ \lambda\sin\rho - R\cos\rho\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + R\cos\alpha \\ \lambda \\ -R\sin\alpha \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in [-r, r], \alpha \in [0, 2\pi[, R = \sqrt{r^2 - \lambda^2}$

Eingriffsbedingung aus der Vorlesung:

$$0 = \sin\alpha(p\cos\rho - c\sin\rho) + \cos\alpha\cos\rho(\lambda + R\dot{R}) + \dot{R}(c\cos\rho + p\sin\rho) =$$

$$\sin\alpha \cdot p + \cos\alpha(\lambda + R\dot{R}) + \dot{R} \cdot m$$

Nebenrechnung: $\dot{R} = \frac{-2\lambda}{2\sqrt{r^2-\lambda^2}} = \frac{-\lambda}{\sqrt{r^2-\lambda^2}}$, $R\dot{R} = -\lambda$

Eingriffsbedingung:

$$0 = \sin\alpha \cdot p + \cos\alpha(\lambda - \lambda) - \frac{\lambda \cdot m}{\sqrt{r^2 - \lambda^2}} = \sin\alpha \cdot p - \frac{\lambda \cdot m}{\sqrt{r^2 - \lambda^2}}$$

Damit ist

$$\sin\alpha = \frac{\lambda \cdot m}{p\sqrt{r^2 - \lambda^2}}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{p^2(r^2 - \lambda^2) - \lambda^2 m^2}}{p\sqrt{r^2 - \lambda^2}}$$

Eingriffslinie l durch Einsetzen in die Parameterdarstellug von Σ:

$$l : \vec{z}(\lambda, \alpha(\lambda)) = \begin{pmatrix} m + R(\lambda)\cos\alpha(\lambda) \\ \lambda \\ -R(\lambda)\sin\alpha(\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m \pm \sqrt{r^2 - \lambda^2}\frac{\sqrt{p^2(r^2-\lambda^2)-\lambda^2m^2}}{p\sqrt{r^2-\lambda^2}} \\ \lambda \\ -\sqrt{r^2 - \lambda^2}\frac{\lambda \cdot m}{p\sqrt{r^2-\lambda^2}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} m \pm \frac{\sqrt{p^2(r^2-\lambda^2)-\lambda^2m^2}}{p} \\ \lambda \\ -\frac{\lambda \cdot m}{p} \end{pmatrix}$$

Die Eingriffslinie liegt in der Ebene $my + pz = 0$. Diese Ebene enthält die x-Achse, ist also ein Großkreis von Σ und senkrecht zur Bahnschraubtangente des Mittelpunktes von Σ.

2. Der Drehzylinder Ω mit dem Breitenkreisradius $\rho > 0$ und der x-Achse als Drehachse wird um die (gerichtete) z-Achse verschraubt (Schraubparameter $p \neq 0$). Sei Φ die Hüllschraubfläche der Schraublagen von Ω. Man bestimme die Kurve q, längs der sich Φ und der Drehzylinder Ω (in ihrer Anfangslage) berühren („Eingriffslinie“).

Lösung:

Die Formeln aus der Vorlesung sind nicht unmittelbar anwendbar, da in der Vorlesung die x-Achse als Gemeinlot von a und b gewählt war.

Eingriffsbedingung: Wann ist die Bahnschraubtangente eines Zylinderpunkts auch Zylindertangente?

Parameterdarstellung des Zylinders:

$$\Omega : \vec{z}(\lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Das ρ ist nicht das ρ der Vorlesung sondern der konstante Breitenkreisradius von Ω.

Bahnschraublinie eines Zylinderpunktes:

$$\vec{y}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot \lambda - \sin\varphi \cdot \rho\cos\alpha \\ \sin\varphi \cdot \lambda + \cos\varphi \cdot \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha + p\varphi \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor der Bahnschraublinie für $\varphi = 0$:

$$\dot{\vec{y}}(0) = \begin{pmatrix} -\rho\cos\alpha \\ \lambda \\ p \end{pmatrix}$$

Wann ist die Bahnschraubtangente auch Tangente an Ω, also $\perp \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix}$

Das liefert die **Eingriffsbedingung**: $\lambda\rho\cos\alpha + p\rho\sin\alpha = 0$ oder kürzer: $\lambda\cos\alpha + p\sin\alpha = 0$:

$$\tan\alpha = -\frac{\lambda}{p} \quad \text{oder} \quad \lambda = -p\tan\alpha$$

Eingriffslinie q:

$$q : \vec{z}(\lambda(\alpha), \alpha) = \begin{pmatrix} -p\tan\alpha \\ \rho\cos\alpha \\ \rho\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Tafelskizze: Normalprojektion in die xz-Ebene

Gefräste Hüllschraubfläche Φ:

$$\Phi : \vec{y}(\varphi, \alpha) = \begin{pmatrix} -p\tan\alpha\cos\varphi - \rho\cos\alpha\sin\varphi \\ -p\tan\alpha\sin\varphi + \rho\cos\alpha\cos\varphi \\ \rho\sin\alpha + p\varphi \end{pmatrix}$$

Dabei wurde das Problem eines möglichen Unterschnitts nicht betrachtet.

3. Sei Φ die Wendelfläche mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}(u, v) = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ pu \end{pmatrix} ; u, v \in \mathbb{R} \ \ (p \neq o)$$

und sei b die Parallele zur z-Achse durch den Punkt $(c, 0, 0)$ $(c > 0)$. Man bestimme die Drehfläche Ψ mit der Drehachse b, deren Hüllschraubfläche $\hat{\Phi}$

bei Verschraubung von Ψ um die z-Achse mit dem Schraubparameter p Teil der Wendelfläche Φ ist. Welche Eingriffslinie q ergibt sich? Welchen Teil $\hat{\Phi}$ der Wendelfläche Φ erhält man?

Lösung:

Geg.: Zu fräsende Wendelfläche, Schraubachse $a = z$-Achse
Drehachse b eines Fräsers ... Parallele zur z-Achse durch $(c, 0, 0)$, $\quad (c > 0)$

Lage zum KS wie in der Vorlesung: x-Achse ist Gemeinlot von a, b.
Bezeichnungen anders als in der Vorlesung.

Schlüsselgleichung aus der Vorlesung:

$$0 = \det \begin{pmatrix} y_1 - c & \overbrace{A_1 \cos\varphi - A_2 \sin\varphi}^{\text{Normalenvektor der Schraubfläche}} & 0 \\ y_2 & A_1 \sin\varphi + A_2 \cos\varphi & \cos\rho \\ y_3 & A_3 & \sin\rho \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$\vec{y}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} -t \sin\varphi \\ t \cos\varphi \\ p\varphi \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = 0, x_2(t) = t, x_3(t) = 0 \ \ldots \ \text{Erzeugende der Schraubfläche}$$

$A_1 = x_1 \dot{x}_3 - p\dot{x}_2 = -p$
$A_2 = x_2 \dot{x}_3 - p\dot{x}_1 = 0$
$A_3 = -x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = -t$

Also Schlüsselgleichung:

$$0 = \det \begin{pmatrix} -t \sin\varphi - c & -p \cos\varphi & 0 \\ t \cos\varphi & -p \sin\varphi & 0 \\ p\varphi & -t & 1 \end{pmatrix} = -p \det \begin{pmatrix} -t \sin\varphi - c & \cos\varphi \\ t \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= -p(-t(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - c \sin\varphi) = p(t + c \sin\varphi)$$

$$\Rightarrow t = -c \sin\varphi$$

Eingriffslinie q durch Einsetzen in die PD von Φ:

$$q : \vec{y}(\varphi, t(\varphi)) = \begin{pmatrix} c \sin^2\varphi \\ -c \cos\varphi \sin\varphi \\ p\varphi \end{pmatrix}$$

oder

$$q : \vec{y}(\varphi(t), t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{c} \\ \pm t \frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{c} \\ p\varphi \end{pmatrix}$$

Die Punkte der Eingriffslinie haben von der Drehachse b einen Abstand von

$$\sqrt{(c \sin^2\varphi - c)^2 + c^2 \cos^2\varphi \sin^2\varphi} = c\sqrt{\cos^4\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\varphi} = c\sqrt{\cos^2\varphi} =$$

$$c|\cos\varphi| = c|\cos\frac{z}{p}|$$

Der Meridian der Drehfläche ist eine Kosinus-Kurve.

Als Teil $\hat{\Phi}$ der Wendelfläche Φ erhält man nur das Stück innerhalb des Drehzylinders $x^2 + y^2 \leq c^2$.

In politics, nothing happens by accident. If it happens, you can bet it was planned that way.
Franklin D. Roosevelt