Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. J. Hartl

SS 2015
Blatt 5

Angewandte Geometrie

1. Sei c die Raumkurve in E^3 mit der Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4-3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a) Man bestimme

— die Bogenlänge s,

— das begleitende Dreibein $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ (Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalenvektor),

— die Krümmung κ und die Torsion τ

von c in Abhängigkeit von t.

Lösung:

Bogenlänge s:

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)|\, d\tau \qquad (a \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = 1 + 36t^2 + 18^2t^4 = (1+18t^2)^2$$

$$\Rightarrow s(t) = \int_0^t (1+18\tau^2)\, d\tau = t + 6t^3$$

Begleitendes Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$:

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+18t^2}$$

$$\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 36t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 6t^2(-36+18) \\ -36t \\ -6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2 = 36 \cdot (1+18t^2)^2 \quad (\text{wie bei } \dot{\vec{x}}^2)$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+18t^2}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} -18t^2 \\ -6t \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -6t \\ 18t^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+18t^2)^2} =$$

$$\begin{pmatrix} -6t(18t^2+1) \\ -1+(18t^2)^2 \\ 6t(18t^2+1) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+18t^2)^2} = \begin{pmatrix} -6t \\ 18t^2-1 \\ 6t \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+18t^2}$$

Krümmung κ:

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{6 \cdot (1+18t^2)}{(1+18t^2)^3} = \frac{6}{(1+18t^2)^2}$$

Torsion τ:

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}$$

$$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6t & -6 & 0 \\ 18t^2 & 36t & 36 \end{pmatrix} = -6 \cdot 36 \Rightarrow$$

$$\tau(t) = \frac{-6 \cdot 36}{36 \cdot (1+18t^2)^2} = -\kappa(t)$$

b) Man zeige, dass c eine Böschungslinie ist und bestimme die zugehörige Böschungsrichtung und den Böschungswinkel.

Lösung:

Die Kurve c ist eine W-Punkt-freie C^ω-Kurve. Da nach **a)** der Quotient $\frac{\tau}{\kappa} = -1$ konstant ist, ist c eine Böschungslinie.

Böschungsrichtung:

Der Darboux-Vektor $\tau\vec{t} + \kappa\vec{b}$ hat Böschungsrichtung $\Rightarrow (-\vec{t}+\vec{b}) \cdot (18t^2+1)$ hat Böschungsrichtung $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1-18t^2 \\ 0 \\ -18t^2-1 \end{pmatrix} = (1+18t^2) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

hat Böschungsrichtung $\Rightarrow$

$$\vec{r} := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

hat Böschungsrichtung.
Böschungswinkel: $\sin\alpha = \vec{r}\cdot\vec{t} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ (da $\vec{r}^{\,2} = \vec{t}^{\,2} = 1$) $\Rightarrow$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

(da $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

2. Eine Expedition startet auf dem Äquator und wandert mit konstanter Geschwindigkeit stets exakt nach Nordosten. Man berichte über das Schicksal der Expedition.

Lösung:

Parameterdarstellung der Sphäre:

$$\vec{x}(\alpha,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\varphi \\ \cos\alpha\sin\varphi \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_\alpha = \begin{pmatrix} -\sin\alpha\cos\varphi \\ -\sin\alpha\sin\varphi \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos\alpha\sin\varphi \\ \cos\alpha\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_\alpha{}^2 = 1, \vec{x}_\varphi{}^2 = \cos^2\alpha, \vec{x}_\alpha\cdot\vec{x}_\varphi = 0$$

Ges.: Flächenkurve $\vec{x}(\alpha(s),\varphi(s))$ (der Einfachheit halber s Bogenlänge), so dass gilt:

$$\angle(\vec{x}_\alpha\alpha' + \vec{x}_\varphi\varphi', \vec{x}_\alpha) = \angle(\vec{x}_\alpha\alpha' + \vec{x}_\varphi\varphi', \vec{x}_\varphi) = \frac{\pi}{4},$$

also so, dass

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \vec{x}_\alpha{}^2\alpha' + \vec{x}_\varphi\vec{x}_\alpha\varphi' = \alpha'$$

und

$$1 = (\vec{x}_\alpha\alpha' + \vec{x}_\varphi\varphi')^2 = \alpha'^2 + \cos^2\alpha\varphi'^2,$$

also

$$\alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } \varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\alpha}.$$

Damit ist

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot s.$$

Die Expedition erreicht den Nordpol, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also wenn $s = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Die Steigung von φ als Funktion von s wächst bis dahin über alle Grenzen.

Die Expedition läuft unendlich oft um den Nordpol herum, in immer kleineren Abständen, und kommt nach endlicher Zeit dort an.

3. Im dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 sei eine reguläre W-Punkt-freie C^r-Kurve c $(r \geq 2)$ gegeben durch eine auf ihre Bogenlänge s bezogene Parameterdarstellung $\vec{x}$:

$$c : \vec{x}(s) \qquad (s \in I)$$

Dabei sei I ein offenes Intervall. Für alle $s \in I$ und $h \in \mathbb{R}$, für die $s+h \in I$, sei $\phi(s,h)$ der Winkel der Tangenten von c an den Stellen s und $s+h$ sowie $\psi(s,h)$ der Winkel der Schmiegebenen von c an den Stellen s und $s+h$. Man zeige: Für alle $s \in I$ gilt:

a)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(s,h)}{h} = \kappa(s),$$

Lösung:

$$\sin^2 \phi(s,h) = (\vec{x}\,'(s) \times \vec{x}\,'(s+h))^2$$

Ableiten nach h und Division durch 2 liefert:

$$\sin(\phi(s,h)) \cos(\phi(s,h)) \frac{\partial \phi}{\partial h}(s,h) =$$

$$(\vec{x}\,'(s) \times (\vec{x}\,'(s+h) - \vec{x}\,'(s))) \cdot (\vec{x}\,'(s) \times \vec{x}\,''(s+h))$$

Das Einfügen von $-\vec{x}\,'(s)$ auf der rechten Seite liefert eine Addition von Null.

Division durch h liefert:

$$\frac{\sin(\phi(s,h)}{\phi(s,h)} \cdot \frac{\phi(s,h)}{h} \cos(\phi(s,h) \frac{\partial \phi}{\partial h}(s,h) =$$

$$(\vec{x}\,'(s) \times \frac{\vec{x}\,'(s+h) - \vec{x}\,'(s)}{h}) \cdot (\vec{x}\,'(x) \times \vec{x}\,''(s+h)) \qquad (*)$$

Da $\phi(s,0) = \lim_{h\to 0} \phi(s,h) = 0$, ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(s,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(s,h) - \phi(s,0)}{h-0} = \frac{\partial \phi}{\partial h}(s,0).$$

Daher liefert in (*) der Grenzübergang $h \to 0$:

$$1 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\phi(s,h)}{h} \cdot 1 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\phi(s,h)}{h} = (\vec{x}\,'(s) \times \vec{x}\,''(s))^2,$$

also wegen $\phi(s,h) \geq 0$ für $h \geq 0$ und $(\vec{x}\,'(s) \times \vec{x}\,''(s))^2 = \kappa(s)^2$ die Behauptung.

b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(s,h)}{h} = |\tau(s)| \quad \text{falls } r \geq 3.$$

Lösung:

$$\sin^2\psi(s,h) = (\vec{b}(s)\times\vec{b}(s+h))^2 = (\vec{b}(s)\times(\vec{b}(s+h)-\vec{b}(s)))^2$$

Division durch h^2 liefert:

$$\frac{\sin^2\psi(s,h)}{\psi(s,h)^2}\cdot\frac{\psi(s,h)^2}{h^2} = (\vec{b}(s)\times\frac{\vec{b}(s+h)-\vec{b}(s)}{h})^2.$$

Der Grenzübergang für $h\to 0$ liefert:

$$1^2\cdot(\lim_{h\to 0}\frac{\psi(s,h)}{h})^2 = (\vec{b}(s)\times\vec{b}\,'(s))^2.$$

Wegen $\vec{b}\,'(s) = -\tau(s)\cdot\vec{n}(s)$ folgt die Behauptung.

4. Eine Gerade g des E^3 wird um die Achse a ($\neq g$) verschraubt.

a) Man überlege sich: Im E^3 lässt sich ein kartesisches Koordinatensystem $\{O;x,y,z\}$ ohne Einschränkung so wählen, dass die Schraubachse a mit der z-Achse übereinstimmt und die Gerade g in ihrer Anfangslage die positive x-Achse in rechtem Winkel schneidet. (Dabei zählt hier der Ursprung O zur positiven x-Achse.)

Lösung:

Beh.: Es gibt ein kart. (o.E. Rechts-)KS in $\mathbb{E}^3$, so dass gilt:
- Schraubachse $a = z$-Achse,
- g schneidet die positive x-Achse rechtwinklig.

Bew.: 1. Fall: g nicht $\parallel a \Rightarrow$ Es gibt genau ein Gemeinlot l von g und a.
2. Fall: $g\parallel a \Rightarrow$ Es gibt ein Gemeinlot l von g und a.

Die x-Achse liegt notwendig auf einem Gemeinlot l von a und g. Der Schnitt von l mit a ist der Koordinatenursprung O. Im 1. Fall ist der Koordinatenursprung eindeutig bestimmt, im zweiten Fall beliebig auf a. Die Orientierung der z-Achse ist zweideutig bestimmt. Die Orientierung der x-Achse ist eindeutig bestimmt und geht von O nach $l\cap g$, falls $g\cap a=\emptyset$, sonst zweideutig. Die y-Achse ist das Gemeinlot von a und l. Ihre Orientierung ist eindeutig bestimmt, wenn das KS ein Rechts-KS sein soll, sonst zweideutig.

b) Man wähle das Koordinatensystem gemäß den Vorgaben in **a)**. Unter Verwendung des Schraubparameters p, des Abstandes $b := d(a,g) = d(O,g)$ von a und g sowie des Richtungsvektors $\vec{r} = (0,r_2,r_3)^T$ von g gebe man eine Parameterdarstellung $\vec{x}(u,v)$ der von g überstrichenen Strahlschraubfläche Ψ an.

Lösung:

g in der Ausgangslage:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ tr_2 \\ tr_3 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der Schraubfläche:

$$\Psi : \vec{z}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ tr_2 \\ tr_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot b - \sin\varphi \cdot tr_2 \\ \sin\varphi \cdot b + \cos\varphi \cdot tr_2 \\ tr_3 + p\varphi \end{pmatrix}$$

c) Im Fall $b = r_3 = 0$, $p \neq 0$ (Wendelfläche) ermittle man eine implizite Gleichung $f(x,y,z) = 0$ für Ψ.

Lösung:

$b = r_3 = 0,\ p \neq 0$: **Wendelfläche**

$$\Psi : \vec{z}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cdot tr_2 \\ \cos\varphi \cdot tr_2 \\ p\varphi \end{pmatrix}$$

$x = -\sin\varphi \cdot tr_2$
$y = \cos\varphi \cdot tr_2$
$z = p\varphi$
Gesucht: Ein Ausdruck in x, y, z, der identisch verschwindet. Der naheliegende Versuch mit $x^2 + y^2$ führt nicht zum Ziel. Aber:
$\cos\varphi \cdot x + \sin\varphi \cdot y = 0$ und $\varphi = \frac{z}{p}$. Also:

$$\Psi : x \cdot \cos\frac{z}{p} + y \cdot \sin\frac{z}{p} = 0.$$

Zumindest erfüllt jeder Punkt der Parameterdarstellung diese Gleichung. Umgekehrt erhält man jeden Punkt, der diese Gleichung erfüllt mit einem geeigneten Paar (t, φ) aus der Parameterdarstellung (denn r_2 ist notwendig $\neq 0$).

d) Welche Fläche(n) erhält man für $p = 0$ (Drehung von g um a)?

Lösung:

$p = 0$: Drehfläche:
$x = \cos\varphi \cdot b - \sin\varphi \cdot tr_2$
$y = \sin\varphi \cdot b + \cos\varphi \cdot tr_2$

$z = tr_3$

$x^2 = \cos^2\varphi \cdot b^2 + \sin^2\varphi \cdot t^2 r_2^2 - 2\cos\varphi \sin\varphi \cdot btr_2$
$y^2 = \sin^2\varphi \cdot b^2 + \cos^2\varphi \cdot t^2 r_2^2 + 2\cos\varphi \sin\varphi \cdot btr_2$
$z^2 = t^2 r_3^2$

$x^2 + y^2 = b^2 + t^2 r_2^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 - b^2 = t^2 r_2^2$ und $z^2 = t^2 r_3^2 \Rightarrow$

$$\Psi : r_3^2(x^2 + y^2) - r_2^2 z^2 = b^2 r_3^2.$$

Das ist die Gleichung eines einschaligen Drehhyperboloids, falls $b \neq 0, r_2 \neq 0, r_3 \neq 0$.
Falls $b = 0$ erhält man einen Drehkegel mit den Entartungsfällen: xy-Ebene (falls $r_3 = 0$) und z-Achse (falls $r_2 = 0$).
Falls $b \neq 0$ gibt es die Entartungsfälle Drehzylinder (falls $r_2 = 0$) und die xy-Ebene, aus der ein Kreis um O mit dem Radius b herausgenommen ist.

e) Im weiteren sei g windschief und nicht senkrecht zu a ($b \neq 0, r_2 \neq 0, r_3 \neq 0$). Für den Schraubparameter p gelte:

$$p = \frac{r_3}{r_2} \cdot b (\neq 0).$$

Man zeige:
Die Schnittkurve k von Ψ mit der xy-Ebene ist eine Kreisevolvente.

Lösung:

Nach b) hat die Tangente der Bahnschraublinie eines Punktes von Ψ den Richtungsvektor

$$\vec{z}_\varphi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cdot b - \cos\varphi \cdot tr_2 \\ \cos\varphi \cdot b - \sin\varphi \cdot tr_2 \\ p \end{pmatrix}$$

speziell:

$$\vec{z}_\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ \frac{r_3}{r_2} \cdot b \end{pmatrix} = \frac{b}{r_2} \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Ψ ist die Tangentenfläche der Bahnschraublinie c des Punktes

$$\vec{z}(0, 0) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Tangenten von c haben dieselbe konstante Steigung wie c, also bei gleicher Länge des Grundrisses dieselbe Bogenlänge oder auch bei gleicher Höhendifferenz von Punkten dieselbe Bogenlänge zwischen den Punkten, gemessen auf c oder auf der Tangente.

Tafelskizze dazu

Kurze Rechnung:

$$\Psi : \vec{z}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot b - \sin\varphi \cdot tr_2 \\ \sin\varphi \cdot b + \cos\varphi \cdot tr_2 \\ tr_3 + \frac{r_3}{r_2} b\varphi \end{pmatrix}$$

Schnittkurve k mit der xy-Ebene: $0 = z = tr_3 + \frac{r_3}{r_2} b\varphi \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{b}{r_2}\varphi$

Parameterdarstellung von k als ebene Kurve:

$$\vec{k}(\varphi) = b \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} - \varphi \cdot b \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$b \cdot (\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix})$$

- Mathematik ist nicht alles, aber ohne Mathematik ist alles nichts.

  Hans-Olaf Henkel,

  damals Präsident des Bundesverbandes der deutschen Industrie (BDI), in einem Interview der Süddeutschen Zeitung, 1.9.2000, auf die Frage " Worin besteht das wichtige Wissen? ", hier zitiert nach dem Vieweg Berufs- und Karriere-Planer Mathematik 2001, S. 12

- Ich bin kein potentieller Selbstmörder und sehe deshalb ein: mit den Wölfen muß man heulen. Aber die Forderung, mit den Hühnern zu gackern, erscheint mir denn doch ein bißchen hybrid ...

  H. Eisenreich,

  gefunden in FOR M extra 02/24 vom 15.03.1982, S. 2 unter der Überschrift "Meine kleine wirre Welt"