Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. J. Hartl

Angewandte Geometrie

1. Sei c die Raumkurve in E^3 mit der Parametrisierung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4 - 3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a) Man bestimme

— die Bogenlänge s,

— das begleitende Dreibein $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ (Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalenvektor),

— die Krümmung κ und die Torsion τ

von c in Abhängigkeit von t.

b) Man zeige, dass c eine Böschungslinie ist und bestimme die zugehörige Böschungsrichtung und den Böschungswinkel.

2. Eine Expedition startet auf dem Äquator und wandert mit konstanter Geschwindigkeit stets exakt nach Nordosten. Man berichte über das Schicksal der Expedition.

3. Im dreidimensionalen euklidischen Raum E^3 sei eine reguläre W-Punkt-freie C^r-Kurve c ($r \geq 2$) gegeben durch eine auf ihre Bogenlänge s bezogene Parameterdarstellung $\vec{x}$:

$$c : \vec{x}(s) \qquad (s \in I)$$

Dabei sei I ein offenes Intervall. Für alle $s \in I$ und $h \in \mathbb{R}$, für die $s + h \in I$, sei $\phi(s, h)$ der Winkel der Tangenten von c an den Stellen s und $s + h$ sowie $\psi(s, h)$ der Winkel der Schmiegebenen von c an den Stellen s und $s + h$. Man zeige: Für alle $s \in I$ gilt:

a)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(s, h)}{h} = \kappa(s),$$

b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(s,h)}{h} = |\tau(s)| \quad \text{falls } r \geq 3.$$

4. Eine Gerade g des E^3 wird um die Achse a ($\neq g$) verschraubt.

a) Man überlege sich: Im E^3 lässt sich ein kartesisches Koordinatensystem $\{O; x, y, z\}$ ohne Einschränkung so wählen, dass die Schraubachse a mit der z-Achse übereinstimmt und die Gerade g in ihrer Anfangslage die positive x-Achse in rechtem Winkel schneidet. (Dabei zählt hier der Ursprung O zur positiven x-Achse.)

b) Man wähle das Koordinatensystem gemäß den Vorgaben in **a)**. Unter Verwendung des Schraubparameters p, des Abstandes $b := d(a,g) = d(O,g)$ von a und g sowie des Richtungsvektors $\vec{r} = (0, r_2, r_3)^T$ von g gebe man eine Parameterdarstellung $\vec{x}(u,v)$ der von g überstrichenen Strahlschraubfläche Ψ an.

c) Im Fall $b = r_3 = 0$, $p \neq 0$ (Wendelfläche) ermittle man eine implizite Gleichung $f(x,y,z) = 0$ für Ψ.

d) Welche Fläche(n) erhält man für $p = 0$ (Drehung von g um a)?

e) Im weiteren sei g windschief und nicht senkrecht zu a ($b \neq 0, r_2 \neq 0, r_3 \neq 0$). Für den Schraubparameter p gelte:

$$p = \frac{r_3}{r_2} \cdot b (\neq 0).$$

Man zeige:

Die Schnittkurve k von Ψ mit der xy-Ebene ist eine Kreisevolvente.

- Mathematik ist nicht alles, aber ohne Mathematik ist alles nichts.

  Hans-Olaf Henkel,

  damals Präsident des Bundesverbandes der deutschen Industrie (BDI), in einem Interview der Süddeutschen Zeitung, 1.9.2000, auf die Frage " Worin besteht das wichtige Wissen? ", hier zitiert nach dem Vieweg Berufs- und Karriere-Planer Mathematik 2001, S. 12

- Ich bin kein potentieller Selbstmörder und sehe deshalb ein: mit den Wölfen muß man heulen. Aber die Forderung, mit den Hühnern zu gackern, erscheint mir denn doch ein bißchen hybrid …

  H. Eisenreich,

  gefunden in FOR M extra 02/24 vom 15.03.1982, S. 2 unter der Überschrift "Meine kleine wirre Welt"