Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. J. Hartl

SS 2015
Blatt 4

Angewandte Geometrie

1. Ein Kind läuft einen geradlinigen Weg entlang und zieht an einer Schnur ein (seitlich des Weges befindliches) Spielzeug hinter sich her. Man bestimme die Bahnkurve des Spielzeugs (**Traktrix**, **Schleppkurve** oder **Hundekurve**).

2. Sei c die Kurve in E^2 mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2\rho\cos(t) - \rho\cos(2t) \\ 2\rho\sin(t) - \rho\sin(2t) \end{pmatrix} \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

Die Kurve c heißt eine **Kardioide**.

a) Man gebe die Bogenlänge s von c als Funktion des Kurvenparameters t an und bestimme die Gesamtlänge L der Kurve c.

b) Man errechne die Krümung κ von c in Abhängigkeit von der Bogenlänge s und von dem Parameter t und ermittle die Gesamtkrümmung K der Kardioide. Wie groß ist die Krümmung der Kurve c in ihrem Scheitelpunkt?

c) Welchen Flächeninhalt F besitzt das von c eingeschlossene Gebiet?

3. Für eine reguläre C^2-Kurve c in E^3 mit der Parametrisierung $\vec{x}(t)$, ($t \in I :=]a, b[$) mit $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$, gelte $\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t) = \vec{o}$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie: c ist in einer Geraden enthalten.

4. Für

a) $n = 2$, c regulär,

b) $n = 2$, c nicht notwendig regulär,

c) $n \geq 3$, c regulär

beweise oder widerlege man die folgende Behauptung:

Sind A, B zwei verschiedene Punkte der C^1-Kurve c in E^n, so besitzt c einen zwischen A und B gelegenen Punkt mit zur Sehne AB paralleler Tangente.

Man sollte alles so einfach machen wie möglich, aber nicht einfacher.

Albert Einstein (1879 - 1955)