Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. J. Hartl

SS 2015
Blatt 2

Angewandte Geometrie

1. Sei $\vec{s} \in \mathbb{R}^3$ und S die schiefsymmetrische Matrix mit $S\vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

a) Man zeige, dass die Matrix $E - S$ regulär ist.

Lösung:

$$\vec{s} =: \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} =: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{s} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} s_2x_3 - s_3x_2 \\ s_3x_1 - s_1x_3 \\ s_1x_2 - s_2x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}$$

S ist tatsächlich schiefsymmetrisch, wie in der Aufgabenstellung behauptet wurde.

Beh.: $E - S$ ist regulär.

Bew. 1: (algebraisch-rechnerisch:)

$$\det(E - S) = \det \begin{pmatrix} 1 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 1 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 1 \end{pmatrix} = (\text{SARRUS}) =$$

$$1 + s_3s_1s_2 - s_2s_3s_1 + s_2^2 + s_1^2 + s_3^2 = 1 + \vec{s}^{\,2} \geq 1 > 0$$

Damit ist $(E - S)$ regulär.

Bew. 2:

Sei

$$\vec{o} = (E - S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} = \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x}$$

Dann ist einerseits $\vec{x} = \vec{s} \times \vec{x}$. Andererseits wissen wir, dass gilt:

$$\vec{x} \perp \vec{s} \times \vec{x}$$

Folglich ist

$$\vec{x} \perp \vec{x},$$

also

$$\vec{x} = \vec{o}.$$

Aus $(E - S)\vec{x} = \vec{o}$ folgt also $\vec{x} = \vec{o}$. Damit ist $(E - S)$ regulär.

Bew. 3:

Sei

$$\vec{o} = (E - S)\vec{x} = E\vec{x} - S\vec{x} = \vec{x} - \vec{s} \times \vec{x}$$

Bildet man das Skalarprodukt mit $\vec{x}$, so erhält man:

$$0 = \vec{x}^2 - 0$$

Aus $(E - S)\vec{x} = \vec{o}$ folgt also $\vec{x} = \vec{o}$. Damit ist $(E - S)$ regulär.

b) Man zeige, dass die Matrix $U := (E - S)^{-1}(E + S)$ eine Drehmatrix ist.

Lösung:

Bew. 1:

Zu zeigen ist: $UU^T = E$ und $\det(U) = +1$.

$$UU^T = (E - S)^{-1}(E + S)((E - S)^{-1}(E + S))^T =$$
$$(E - S)^{-1}(E + S)(E + S)^T(E - S)^{-1^T} =$$
$$(E - S)^{-1}(E + S)(E - S)(E + S)^{-1}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt dabei u.a. deshalb, weil Transposition und Inversion von Matrizen vertauschbar sind. Weil

$$(E + S)(E - S) = E^2 - S + S - S^2 = (E - S)(E + S),$$

gilt weiter:

$$UU^T = (E - S)^{-1}(E - S)(E + S)(E + S)^{-1} = E \cdot E = E.$$

Nach dem Determinantenmultiplikationssatz gilt außerdem:

$$\det(U) = \det((E - S)^{-1}) \cdot \det(E + S) = (\det(E - S))^{-1} \cdot \det(E - (-S)) =$$

$$(1 + \vec{s}^{\,2})^{-1} \cdot (1 + \vec{s}^{\,2}) = 1$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen folgt dabei aus **Bew. 1** in Teilaufgabe **a)**.

Bew. 2:

Geometrische Deutung von $E+S$ und $E-S$: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(E+S)(\lambda\vec{s}) = \lambda \cdot (\vec{s} + \vec{s} \times \vec{s}) = \lambda\vec{s}$$

und analog:

$$(E-S)(\lambda\vec{s}) = \lambda\vec{s}$$

Die Gerade a durch den Koordinatenursprung O mit Richtungsvektor $\vec{s}$ bleibt bei $E+S$ und $E-S$ punktweise fest.

Für jeden Vektor $\vec{x}$ in der Ebene $\nu \perp \vec{s}$ durch O gilt: $\vec{s} \times \vec{x}$ liegt ebenfalls in ν.

Damit gilt: Jede Lotebene zu $\vec{s}$ bleibt als Ganzes fest.

Einer Skizze — Normalprojektion des Raumes in die Ebene ν entnimmt man:

Jeder Vektor $\vec{x}$ in ν schließt mit seinem Bild $(E+S)\vec{x} = \vec{x} + \vec{s} \times \vec{x}$ einen Winkel τ ein, für den gilt:

$$\tan\tau = \frac{|\vec{s} \times \vec{x}|}{|\vec{x}|} = \frac{|\vec{s}||\vec{x}|\sin\angle(\vec{s},\vec{x})}{|\vec{x}|\sin\angle(\vec{s},\vec{x})} = |\vec{s}|$$

Im Nenner vor dem letzten Gleichheitszeichen darf man $\sin\angle(\vec{s},\vec{x})$ einfach dazuschreiben, weil dieser Faktor gleich 1 ist.

Die Länge des Vektors $(E+S)\vec{x} = \vec{x} + \vec{s} \times \vec{x}$ verhält sich zur Länge von $\vec{x}$ nach Pythagoras wie folgt:

$$\frac{|\vec{x} + \vec{s} \times \vec{x}|}{|\vec{x}|} = \frac{\sqrt{\vec{x}^{\,2} + \vec{s}^{\,2}\vec{x}^{\,2}\sin^2\angle(\vec{s},\vec{x})}}{|\vec{x}|} =$$

$$\frac{\sqrt{\vec{x}^{\,2}\sin^2\angle(\vec{s},\vec{x}) + \vec{s}^{\,2}\vec{x}^{\,2}\sin^2\angle(\vec{s},\vec{x})}}{|\vec{x}|\sin\angle(\vec{s},\vec{x})} = \sqrt{1+\vec{s}^{\,2}}$$

In der Ebene ν wirkt $E+S$ wie eine Drehstreckung mit Drehwinkel τ und Streckungsfaktor $\sqrt{1+\vec{s}^{\,2}}$.

Jeder Vektor, der nicht notwendig in ν liegt, ist von der Gestalt $\lambda\vec{s} + \vec{x}$ mit $\vec{x} \perp \vec{s}$.

Aus der angegebenen Rechnung folgt also: In allen Ebenen $\perp a$ wirkt $E+S$ wie eine Drehstreckung, zusammengesetzt aus einer Rechtsdrehung um die durch $\vec{s}$ orientierte Gerade a durch den Winkel τ mit $\tan\tau = |\vec{s}|$ und einer anschließenden Streckung mit dem Streckungsfaktor $\sqrt{1+\vec{s}^{\,2}}$

aus dem Schnittpunkt von a mit der Ebene als Streckungszentrum.

Achtung: In Richtung von a wird dabei nicht gestreckt, nur in den Richtungen $\perp a$.

Ersetzt man $\vec{s}$ durch $-\vec{s}$, so erhält man:

In allen Ebenen $\perp a$ wirkt $E - S$ wie eine Drehstreckung, zusammengesetzt aus einer Linksdrehung um die durch $\vec{s}$ orientierte Gerade a durch den Winkel τ mit $\tan\tau = |\vec{s}|$ und einer anschließenden Streckung mit dem Streckungsfaktor $\sqrt{1+\vec{s}^2}$ aus dem Schnittpunkt von a mit der Ebene als Streckungszentrum.

Daraus folgt unmittelbar: In allen Ebenen $\perp a$ wirkt $(E-S)^{-1}$ wie eine Drehstreckung, zusammengesetzt aus einer Rechtsdrehung um die durch $\vec{s}$ orientierte Gerade a durch den Winkel τ mit $\tan\tau = |\vec{s}|$ und einer anschließenden Streckung mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{1+\vec{s}^2}}$ aus dem Schnittpunkt von a mit der Ebene als Streckungszentrum.

Nacheinanderausführung liefert:

In allen Ebenen $\perp a$ wirkt

$$(E-S)^{-1}(E+S)$$

wie eine Rechtsdrehung um die durch $\vec{s}$ orientierte Gerade um a mit Drehwinkel $2\tau = 2\arctan|\vec{s}|$.

Damit ist $U := (E-S)^{-1}(E+S)$ die Matrix einer Rechtsdrehung um die durch $\vec{s}$ orientierte Drehachse a mit Drehwinkel $2\arctan|\vec{s}|$.

c) Für $U \neq E$ bestimme man die Drehachse und den Drehwinkel der zu U gehörigen Drehung.

Lösung:

Mit der geometrischen Überlegung aus **b)** (Beweis 2) sind wir insgesamt fertig. Ohne diese Überlegung wäre noch nachzurechnen, dass die Gerade a Fixpunktgerade ist (Anfang von **b) Beweis 2**) und für **einen** Vektor $\vec{x} \perp \vec{s}$ der Winkel $\angle(\vec{x}, (E-S)^{-1}(E+s)\vec{x})$. Da die Abbildung geometrisch definiert ist, also unabhängig vom Koordinatensystem, dürfen wir das Koordinatensystem so wählen, dass die z-Achse in Richtung von $\vec{s}$ zeigt, dass also bezüglich des neuen Koordinatensystems gilt: $\vec{s} = (0,0,s)^T$ mit $s \geq 0$. Damit ist

$$E+S = \begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E-S = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$(E-S)^{-1} = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{e}_1 := (1,0,0)^T$ erhält man also:

$$\vec{v} := U\vec{e}_1 = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{e}_1 =$$

$$\frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1 & -s & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+s^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+s^2}\begin{pmatrix} 1-s^2 \\ 2s \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\cos\angle(\vec{e}_1, \vec{v}) = \frac{1-s^2}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} - \frac{s^2}{1+s^2} =: \cos^2\tau - \sin^2\tau = \cos 2\tau$. Damit ist der gesuchte Drehwinkel gleich 2τ, wobei $\tan\tau = \frac{\sin\tau}{\cos\tau} = s$. Der gesuchte Drehwinkel ist also

zweimal der Arkustangens der Länge von $\vec{s}$.

(Das in dem speziellen Koordinatensystem berechnete Ergebnis ist damit koordinatenunabhängig beschrieben.)

Ergänzung: Wie findet man die Fixpunktgerade ohne den Anfang von **b), Beweis 2**?

Ansatz: $U\vec{x} = 1 \cdot \vec{x} \Rightarrow$

$(E-S)^{-1}(E+S)\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow$

$(E+S)\vec{x} = (E-S)\vec{x} \Rightarrow$

$\vec{x} + S\vec{x} = \vec{x} - S\vec{x} \Rightarrow$

$S\vec{x} = \vec{o} \Rightarrow$

$\vec{s} \times \vec{x} = \vec{o} \Rightarrow$

$\vec{x} = \lambda\vec{x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

Damit haben wir eine Alternative zur Euler-Formel für eine Achsendrehung.

2. Man bestimme die Drehachse, den Drehwinkel, die (homogenen) Euler-Parameter sowie die Eulerschen Drehwinkel (Präzessions-, Nutations- und Rotationswinkel) der durch die Matrix

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

gegebenen Drehung.

Lösung:

Ist U eine Drehmatrix? Ja. (Kopfrechnung)

(Die Spalten sind paarweise orthogonal. Weil in allen Spalten Zahlen mit denselben Beträgen stehen, sind die Normen der Spalten gleich. Eine Spalte hat Länge 1. Die Determinante von U ist positiv, wie man anhand der Regel von Sarrus sieht, ohne die Determinante wirklich ausrechnen zu müssen, weil der einzige auftretende negative Summand nur den Betrag 1 hat.)

Bestimmung der Drehachse:

Ges.: $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $U\vec{x} = \vec{x}$ oder auch $3U\vec{x} = 3\vec{x}$.

$$2x + 2y + z = 3x$$

$$x - 2y + 2z = 3y$$

$$2x - y - 2z = 3z$$

oder

$$-x + 2y + z = 0 \qquad (1)$$

$$x - 5y + 2z = 0 \qquad (2)$$

$$2x - y - 5z = 0 \qquad (3)$$

Damit ist

$$(1) + (2) : -3y + 3z = 0 \text{ oder } y = z$$

und damit aus (1):

$$x = 3y = 3z.$$

Richtungsvektor $\vec{r}$ der Drehachse:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Damit ist $\vec{r}$ auch gleich normiert.

Die Drehachse

$$a : \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

ist durch die Wahl von $+\vec{r}$ orientiert.

Bestimmung des orientierten Drehwinkels δ:

Wähle $\vec{s} \perp \vec{r}$, z.B. $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$U\vec{s} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{s}^T U \vec{s} = \frac{1}{6} \cdot (0,1,-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$$

$$\Longrightarrow \varphi := |\delta| = \arccos(-\frac{5}{6})$$

Den nichtorientierten Drehwinkel φ hätten wir auch kürzer haben können. Nach einer Formel der Vorlesung gilt:

$$\varphi = \arccos \frac{\mathrm{spur} U - 1}{2} = \arccos \frac{-\frac{2}{3} - 1}{2} = \arccos(-\frac{5}{6})$$

Vorzeichen von δ?

Ist $\{\vec{s}, U\vec{s}, \vec{r}\}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem? Dann ist $\delta > 0$.

Um Brüche zu vermeiden, multiplizieren wir mit dem Produkt der auftretenden Nenner:

$$6 \cdot \sqrt{11} \cdot \det(\vec{s}, U\vec{s}, \vec{r}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$0 - 1 + 3 - 12 - 0 - 1 = -11 < 0$$

Es liegt also eine Linksdrehung vor und

$$\delta = -\arccos(-\frac{5}{6}).$$

Ersetzt man $\vec{r}$ durch $-\vec{r}$ und orientiert man damit die Drehachse um, so wird auch δ mit -1 multipliziert.

(homogene) Euler-Parameter:

Für $\delta \neq \pi$:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t\vec{r} \end{pmatrix} \text{ mit } t = \tan \frac{\delta}{2}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ \sin \frac{\delta}{2} \cdot \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos \delta)} \\ -\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \delta)} \cdot \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{12}} \\ -\sqrt{\frac{11}{12}} \cdot \vec{r} \end{pmatrix}$$

Weil δ negativ ist, ist auch $\sin\frac{\delta}{2}$ negativ.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eulersche Drehwinkel:

Nutationswinkel μ:

$$u_{33} = \cos\mu = -\frac{2}{3} \Rightarrow \mu = \arccos(-\frac{2}{3})$$

Stets ist $0 \leq \mu \leq \pi$, also stets $\mu = \arccos(-\frac{2}{3})$

Knotenlinie k:

$\bar{x}\bar{y}$-Ebene:

$$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schnitt mit xy-Ebene: $2s - t = 0 \Rightarrow$

$$t = 2s$$

Ein Richtungsvektor von k:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Orientierung von k? ($z-$, $\bar{z}$-Achse,k) Rechtssystem!

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -5 < 0$$

Damit gilt:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ist ein normierter Richtungsvektor der Knotenlinie.

Alternativ erhält man $\vec{k}$ auch, indem man das Kreuzprodukt aus dem Richtungsvektor der z-Achse mit dem Richtungsvektor der $\bar{z}$-Achse normiert:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Präzessionswinkel ψ:

$$\cos\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Weil $\vec{k}$ in der xy-Ebene in der oberen Halbebene liegt, ist nicht nur $0 \leq \psi < 2\pi$, sondern sogar $0 < \psi < \pi$, also

$$\psi = \arccos(-\frac{2}{\sqrt{5}})$$

Rotationswinkel φ:

Der Rotationswinkel φ ist der Winkel zwischen der orientierten Knotenlinie und der $\bar{x}$-Achse:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ist $\varphi > 0$ oder $\varphi < 0$, oder, um mit der Konvention aus der Vorlesung übereinzustimmen: Ist $0 < \varphi < \pi$ oder $\pi < \varphi < 2\pi$?

Bilden (Knotenlinie,$\bar{x}$-Achse, $\bar{z}$-Achse) ein Rechtssystem?

Dazu

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 4 + 0 + 2 - (0 - 8 - 4) = 18 > 0$$

(Knotenlinie,$\bar{x}$-Achse, $\bar{z}$-Achse) ist ein Rechtssystem. Damit ist

$$\varphi = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{5}})$$