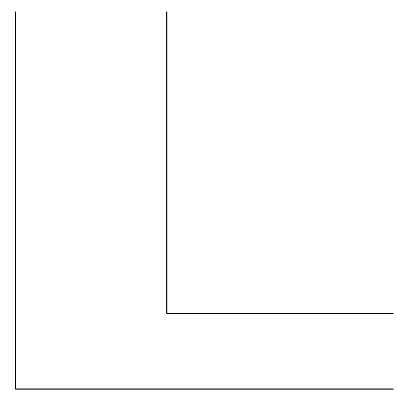
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. J. Hartl

SS 2015
Blatt 1

Angewandte Geometrie

1. Ein Fahrzeug (vereinfacht dargestellt mit rechteckigem Grundriss der Länge l und der Breite b) soll die skizzierte Straßenecke durchfahren. Die beiden eingezeichneten Straßen stoßen rechtwinklig aufeinander. Die Breite der vertikal eingezeichneten Straße sei a, die Breite der horizontal eingezeichneten Straße sei c. Wie groß darf (in Abhängigkeit von $a > 0$, $c > 0$) die Länge l höchstens sein, wenn



a) $b = 0$,

b) $b > 0$

gegeben ist?

Lösung:

Was hat $b = 0$ mit $b > 0$ zu tun?

Ein Fahrzeug mit $b > 0$ kann durchfahren, wenn ein Fahrzeug der Breite $b = 0$ eine andere Straßenecke (mit Abrundung innen) durchfahren kann. (Siehe Figur auf Beiblatt!)

Normaleneinheitsvektor $\vec{n} := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

Hesse-Form von $g(\varphi)$: $x\cos\varphi + y\sin\varphi - d(\varphi) = 0 \qquad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$

M einsetzen: $a\cos\varphi + c\sin\varphi - d(\varphi) = b \Rightarrow$

$$d(\varphi) = a\cos\varphi + c\sin\varphi - b \qquad (\geq 0!)$$

Sei $l(\varphi) := d(X, Y)$.

Ges.: minimales l.

$$X(\frac{d(\varphi)}{\cos\varphi}, 0), \qquad Y(0, \frac{d(\varphi)}{\sin\varphi}) \qquad \Rightarrow$$

$l(\varphi) = d(\varphi)\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{\sin^2\varphi}} = \frac{d(\varphi)}{\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi} + \frac{c}{\cos\varphi} - \frac{b}{\cos\varphi\sin\varphi}$

Minima von l? Notwendig dafür:

$$0 = l'(\varphi) = -a\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + c\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - b\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi} =$$

Den letzten Bruch kann man so zerlegen, dass sich einmal $\sin^2\varphi$ herauskürzt, einmal $\cos^2\varphi$. Daher kann man weiterschreiben:

$$= \frac{1}{\sin^2\varphi}(-a\cos\varphi + b) + \frac{1}{\cos^2\varphi}(c\sin\varphi - b) =$$

Da $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ und $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$, kann man zweimal kürzen, wenn man weiterschreibt:

$$= \frac{a(1-\cos\varphi)}{1-\cos^2\varphi} + \frac{b-a}{\sin^2\varphi} - \frac{c(1-\sin\varphi)}{1-\sin^2\varphi} + \frac{c-b}{\cos^2\varphi} =$$

$$\frac{a}{1+\cos\varphi} + \frac{b-a}{\sin^2\varphi} + \frac{-c}{1+\sin\varphi} + \frac{c-b}{\cos^2\varphi}$$

Zwar sieht man immer noch nicht, welche Nullstellen $l'(\varphi)$ hat, aber man erkennt:

$l'(\varphi)$ ist eine Summe von Brüchen mit konstanten Zähler und variablen positiven Nennern.

Bei den Brüchen mit positiven Zählern ist der Nenner monoton abnehmend, bei den Brüchen mit negativen Zählern ist der Nenner monoton zunehmend.

Damit sind alle vier Summanden streng monoton steigend.

Damit ist l' streng monoton steigend.

$l'(\varphi)$ geht für $\varphi \to 0$ gegen $-\infty$ und für $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ gegen $+\infty$.

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt l' eine Nullstelle φ_{min} in $]0, \frac{\pi}{2}[$, und zwar genau eine, weil l' streng monoton steigend ist.

Da $l(\varphi)$ für $\varphi \to 0$ und für $\varphi \to \frac{\pi}{2}$ beide Male gegen $+\infty$ geht, ist φ_{min} eine Minimalstelle von l'.

Damit sind wir zufrieden. Die Nullstelle mit für praktische Zwecke genügender Genauigkeit zu bestimmen, gehört nicht zu den Aufgaben der Geometrie.

Wir interessieren und noch für leicht zu lösende Spezialfälle:

a) $b = 0$:

$$-a\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + c\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = 0$$

$$c\sin^3\varphi = a\cos^3\varphi$$

$$\tan^3\varphi = \frac{a}{c}$$

$$\varphi_{min} = \arctan\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$$

Was ist $l(\varphi_{min})$?

$$l(\varphi_{min}) = \frac{a}{\sin\varphi_{min}} + \frac{c}{\sin\varphi_{min}} =$$

Wir wollen, dass $\tan\varphi_{min}$ dasteht. Daher schreiben wir weiter:

$$= \frac{1}{\cos\varphi_{min}}(\frac{a}{\tan\varphi_{min}} + c) = \sqrt{1+\tan^2\varphi_{min}}(a\sqrt[3]{\frac{c}{a}} + c) =$$

$$= \sqrt{1+(\frac{a}{c})^{\frac{2}{3}}}(a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c) = c^{-\frac{1}{3}}\sqrt{c^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}}(a^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}})c^{\frac{1}{3}}$$

Also gilt:

$$l(\varphi_{min}) = \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}}^{3}$$

b) Die Bestimmung von φ_{min} kann zum Beispiel durch Bisektion erfolgen.

Einfach ist noch der Fall $a = c$. Wegen der Symmetrie der Figur geht jede Lösung der Figur bei Spiegelung an der Winkelhalbierenden der Straßenecke wieder in eine Lösung über. Da es nur eine Lösung gibt, geht sie in sich über. Folglich ist $\varphi_{min} = \frac{\pi}{4}$. Damit ist

$$l(\varphi_{min}) = 2\sqrt{2}a - 2b.$$

2. In der euklidischen Ebene E^2 seien zwei von einem Punkt S ausgehende Halbgeraden a^+, b^+ mit $0 < \angle(a^+, b^+) \leq \frac{\pi}{3}$ gegeben; ferner seien P, Q zwei (nicht notwendig verschiedene) Punkte im Innengebiet des von den beiden Halbgeraden berandeten konvexen Bereichs $K \subset E^2$. Gesucht ist der kürzeste Weg in K, der von P über einen Punkt $A \in a^+$ sowie einen Punkt $B \in b^+$ nach Q führt.

Lösung:

Wenn man keine Idee zur Lösung der Aufgabe hat, löst man eine ähnliche einfachere Aufgabe:

In der euklidischen Ebene sei eine Gerade g gegeben sowie zwei Punkte U und W auf derselben Seite von g. Wie kommt man auf dem kürzesten Weg von U über einen Punkt $G \in g$ nach W?

Skizze!

Spiegelt man W an g in W', so ist der Weg von U nach W über einen Punkt $G \in g$ genau so lang wie der Weg von U nach W' über denselben Punkt $G \in g$.

Der kürzeste Weg von U nach W' ist offenbar die geradlinige Verbindung. Daraus ergibt sich $G \in g$ als Schnittpunkt, und der Streckenzug von U nach G und anschließend nach W ist der gesuchte kürzeste Weg.

Damit ist die Lösung der ursprünglichen Aufgabe fast klar.

Skizze!

Man spiegle z.B. P an a in P', Q an b in Q'. Der Weg von P über einen Punkt $A \in a^+$ zu einem Punkt $B \in b^+$ und weiter zu Q ist genau so lang wie der Weg von P' über A zu B und weiter nach Q'. Der kürzeste Weg von P' nach Q' ist die kürzeste Verbindung. Damit ist $A = P'Q' \cap a^+$, $B = P'Q' \cap b^+$.

Es bleibt die Frage: Soll man P an a in P' spiegeln und Q an b in Q' oder alternativ P an b in P'' und Q an a in Q''? Zeichnet man beide Möglichkeiten,

Skizze!

so stellt man fest: Für die Dreiecke $P'SQ'$ und $P''SQ''$ gilt: $d(P', S) = d(P, S) = d(P'', S)$ und $d(Q', S) = d(Q, S) = d(Q'', S)$. Falls also der Winkel $P'SQ'$ kleiner ist als der Winkel $P''SQ''$, ist $d(P', Q')$ kleiner als $d(P'', Q'')$.

Also: Man lege eine Gerade h durch S, die P und Q trennt und spiegle jeden der beiden Punkte P und Q an der Halbgeraden a^+ oder b^+, die auf derselben Seite von h liegt wie der Punkt.

Zuletzt noch: Wofür braucht man die Voraussetzung $\angle(a^+, b^+) \leq \frac{\pi}{3}$?

Damit das Verfahren funktioniert, sollte $P'Q'$ beide Halbgeraden a^+ und b^+ schneiden. Das ist sichergestellt, wenn der von $\angle P'SQ'$ eingeschlossene konvexe Bereich die beiden Halbgeraden a^+ und b^+ enthält. Und das wird durch die genannte Voraussetzung sichergestellt. Diese Voraussetzung kann man auch noch abschwächen. Es reicht z.B. $\angle(a^+, b^+) < \frac{\pi}{2}$, und mit einer komplizierteren Formulierung kann man die Voraussetzung noch weiter abschwächen.

3. In der euklidischen Ebene E^2 sei ABC ein Dreieck, bei dem kein Innenwinkel größer als $\frac{2\pi}{3}$ ist. Bestimmen Sie jenen Punkt P in dem von ABC berandeten endlichen Bereich, für den die Summe der Abstände $d(P, A)$, $d(P, B)$, $d(P, C)$ minimal ist.

Lösung:

Skizze!

Nimmt man einen Punkt Q im Inneren des Dreiecks ABC und dreht man das Dreieck AQC um A nach außen durch den Winkel 60^o in die Lage $AQ'C'$, so ist das Dreieck AQQ' gleichseitig, also $d(C', Q') = d(C, Q)$, $d(Q', Q) = d(Q, A)$, $d(Q, B) = d(Q, B)$. Damit $d(Q, C) + d(Q, A) + d(Q, B)$ minimal wird, ist also notwendig $d(C'.Q') + d(Q', Q) + d(Q, B)$ minimal. Dafür liegt notwendig Q auf der Geraden $C'B$. Folglich ist $P \in C'B$. Analog sieht man $P \in AC'''$, wobei C'' aus C hervorgeht durch eine Drehung um B nach außen durch 60^o.

Konstruktion: Drehe C um A durch den Winkel 60^o nach auen in die Lage C'. Drehe C um B durch den Winkel 60^o nach außen in die Lage C''. Dann ist $P = BC' \cap AC''$.

4. In der euklidischen Ebene sind vier verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben. Legen Sie durch jeden dieser Punkte je eine Gerade so, dass die Schnittpunkte der Geraden die Ecken eines Quadrates bilden.
Welche Spezialfälle sind gesondert zu betrachten?

Lösung:

Wir tun so, als hätten wir die Lösung schon:

Seien A_1, A_2, A_3, A_4 die Ecken eines Quadrats $\Box A_1A_2A_3A_4$, $g_1 = A_1A_2$, $g_2 = A_2A_3$, $g_3 = A_3A_4$, $g_4 = A_4A_1$.

Skizze!

(Dann ist $g_1 \parallel g_3$, $g_2 \parallel g_4$.)

Wie kann man weitere Punkte und Geraden in die Skizze einzeichnen, um Zusammenhänge zu erkennen, z.B. kongruente Dreiecke oder Ähnliches?

Sei etwa Q_1 der Lotfußpunkt aus P_1 auf g_3, Q_2 der Lotfußpunkt aus P_2 auf g_4. Schneidet das Lot aus P_2 auf P_1P_3 die Gerade g_4 im Punkt P_4', so sind die Dreiecke $\Delta P_1P_3Q_1$ und $\Delta P_2P_4'Q_2$ kongruent.

Konstruktion (im Beispiel): Fälle aus P_2 das Lot auf P_1P_3. Trage darauf von P_2 aus die Länge der Strecke $\overline{P_1P_3}$ ab bis zum Punkt P_4'. Dann ist P_4P_4' die Gerade g_4, das Lot aus P_1 auf g_4 die Gerade g_1, das Lot aus P_3 auf g_4 die Gerade g_3 und das Lot aus P_2 auf g_1 oder g_3 die Gerade g_2. In dieser Konstruktion kann man P_4' auf beiden Seiten von P_2 wählen.

Konstruktion allgemein: Fälle aus P_i das Lot l_i auf P_jP_k mit $i \neq j \neq k \neq i$. Trage auf l_i aus P_i nach einer Seite die Länge der Strecke $\overline{P_jP_k}$ ab bis zum Punkt P_l mit $l \neq i, j, k$. Dann ist $P_lP_l' =: g_l$ und das Lot auf g_l aus P_j ist g_j, das Lot auf g_l aus P_k ist g_k. Schließlich ist das Lot aus P_i auf g_j oder auf g_k die Gerade g_i.

Wieviele Lösungen gibt es im allgemeinen?

Fällt man das Lot aus P_i auf P_jP_k wie in der Konstruktion angegeben, so wird in der Lösng g_j parallel sein zu g_k und g_i parallel zu g_l. Dieselbe Lösung erhält man, wenn man das Lot aus P_j auf P_iP_l fällt. Es gibt zwar $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, ein Paar $\{P_j, P_k\}$ aus vier Punkten auszuwählen, aber immer zwei der Paare führen auf dieselbe Lösung. Also erhält man drei verschiedene Möglichkeiten.

Es gibt immer zwei Möglichkeiten, die Länge der Strecke $\overline{P_jP_k}$ von P_i aus anzutragen.

Insgesamt erhält man im allgemeinen $3 \cdot 2 = 6$ verschiedene Lösungen.

Was kann unterwegs passieren?

Es kann $P_l = P_l'$ sein. Dann kann man g_l durch P_l beliebig wählen, und es gibt unendlich viele Lösungen.

Es kann $P_l' \neq P_l$ auf P_iP_l liegen. Dann ist $g_i = g_l$ und $g_j = g_k$ und das Quadrat entartet in einen Punkt.

Kein der Geometrie Unkundiger möge hier eintreten.
Satz über dem Eingang der von Platon (427 - 347 v. Chr.) in Athen gegründeten und geleiteten Akademie. Dieser Satz ist auch (in griechischer Sprache) auf dem Emblem der American Mathematical Society (AMS) zu lesen. Die Platonische Akademie bestand bis 529 n. Chr. und wurde dann von dem in Konstantinopel, dem heutigen Istanbul, residierenden Kaiser Iustinian aufgelöst.