Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

`www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14`

Lösungen zu Aufgabenblatt 10 (30. Juni 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Eine konkrete Cayley-Klein-Geometrie

a) Bestimmen Sie zu dem folgenden dualen Kegelschnitt B den zugehörigen primalen Kegelschnitt A.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Untersuchen Sie, ob durch das Primal-Dual-Paar (A, B) beschriebene Kegelschnitt degeneriert ist oder nicht.

Falls er degeneriert ist, geben Sie für die Komponenten, in die er zerfällt, konkrete Koordinaten an, und zwar sowohl primal als auch dual.

c) Der Kegelschnitt (A, B) soll jetzt als Fundamentalgebilde einer Cayley-Klein-Geometrie verwendet werden. Beschreiben Sie die Maßbestimmungen, die sich dadurch für Distanzen und Winkel ergeben, jeweils als „hyperbolisch“, „parabolisch“ oder „elliptisch“.

d) Es sei $c_{\text{ang}} = \frac{1}{2}$. Charakterisieren sie, unter welchen Umständen der Winkel zwischen zwei Geraden reell ist.

e) Das am einfachsten zu konstruierende Doppelverhältnis ist die harmonische Lage. Benutzen Sie diese, um in einem Koordinatensystem, in dem der Kegelschnitt (A, B) eingezeichnet ist, zwei Geraden zu konstruieren, die miteinander einen wohldefinierten und reellen Winkel einschließen. Geben Sie den Wert dieses Winkels an.

f) Diskutieren Sie, was eine geeignete Wahl für den Skalierungsfaktor c_{dist} der Längenmessung ist.

g) Können Sie zwei Punkte konstruieren, die den Abstand 2 von einander haben?

Falls ja, führen Sie diese Konstruktion aus.

h) Können Sie zu zwei vorgegebenen Punkten den Mittelpunkt konstruieren, also den Punkt, der von beiden bezüglich der Maßbestimmung dieser Geometrie den gleichen Abstand hat?

Wenn ja, geben Sie sich selbst zwei hinreichend allgemeine Punkte vor und führen Sie die Konstruktion aus.

LÖSUNG:

a) Der primale Kegelschnitt ergibt sich als Adjunkte Matrix zum dualen Kegelschnitt:

$$A = B^{\triangle} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Der Kegelschnitt ist degeneriert. Der Primale Kegelschnitt A hat Rang 1 und repräsentiert die Doppelgerade $l = (0,1,0)^T$ also $y = 0$. Der duale Kegelschnitt hat Rang 2 und zerfällt in zwei Punkte, $X = (0,0,1)^T$ und $Y = (2,0,1)^T$, wie man durch Addition einer geeigneten antisymmetrischen Matrix schnell sieht.

$$l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Längenmessung ist aufgrund der Doppelgeraden euklidisch, was das gleiche ist wie parabolisch. Winkelmessung ist aufgrund der zwei verschiedenen reellen Punkte hyperbolisch.

d) Zwei von l verschiedene Geraden schließen genau dann einen rellen Winkel ein, wenn ihre Schnittpunkte mit der Geraden l nicht durch X und Y getrennt werden, also wenn sie beide zwischen X und Y liegen, oder wenn sie beide außerhalb liegen. In diesen Fällen ist das Doppelverhältnis positiv und dessen Logarithmus reell.

e) Man konstruiert einfach zwei Punkte A und B, die zu X und Y harmonisch liegen. Dabei sollte X und Y *kein* Paar bilden, da sonst der Winkel komplex würde. Verbindet man die Punkte A und B mit einem beliebigen weiteren Punkt P, so kann man den Winkel, den die Verbindungsgeraden $a = A \vee P$ und $b = B \vee P$ einschließen, genau bestimmen. Zusammen mit den Tangenten an den Kegelschnitt, also mit den Verbindungsgeraden von P zu X und Y, bilden diese eine harmonische Gruppe von Geraden.

Da X und Y kein Paar bilden sollen, ist das Doppelverhältnis, das in die Winkelmessung eingeht, nicht -1, sondern eines der anderen beiden Doppelverhältnisse, die bei harmonischer Lage auftreten können, also entweder 2 oder $\frac{1}{2}$. Dieser Kehrwert im Doppelverhältnis überträgt sich auf das Vorzeichen des Winkels; wenn wir nur den Betrag des Winkels betrachten, kann uns dieses egal sein. Der Betrag des Winkels ist

$$c_{\text{ang}} \ln(2) = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0{,}3466$$

f) Die Längenmessung ist degeneriert. Unabhängig von der Wahl von c_{dist} werden also alle Längen zunächst den absoluten Wert 0 haben. Vergleiche zwischen Längen sind dennoch möglich, doch bei diesen Kürzt sich der Koeffizient c_{dist} aus dem Bruch, so dass jeder von 0 verschiedene Wert zu gleichen Ergebnissen führt. Aus Gründen der Einfachheit bietet sich $c_{\text{dist}} = 1$ an, auch wenn diese Wahl auf keine einzige berechnete Größe irgendeine Auswirkung hat.

g) In degenerierter Maßbestimmung gibt es keine absoluten Größen. Eine Länge 2 in diesem Sinne gibt es also nicht, höchstens eine Länge, die zu einer vorgegebenen Einheitslänge ein Verhältnis 2 hat. Die Frage ist also zu verneinen.

h) Da die Längenbestimmung euklidisch ist, lässt sich auch die ganz gewöhnliche Konstruktion eines projektiv verzerrten euklidischen Mittelpunktes über eine harmonische Lage anwenden.

Aufgabe 2. Kreisabbildungen

Gegeben seien die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

All diese Punkte liegen offensichtlich auf dem Einheitskreis. Gesucht sind jetzt verschiedene Abbildungen, die den Einheitskreis invariant lassen und A auf A' abbilden, B auf B' und C auf C'. Zunächst sollen Sie nur den Rechenweg angeben, die konkrete Berechnung kommt dann als Hausaufgabe.

a) Interpretieren Sie die reellen Koordinaten als Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl, die Sie als Punkt in $\mathbb{CP}^1$ auffassen können. Geben Sie an, mit welchen Schritten sich eine *projektive Transformation* entsprechend der obigen Kriterien berechnen können.

b) Neben der eben angegebenen projektiven Transformation gibt es in $\mathbb{CP}^1$ noch eine weitere *harmonische Abbildung*, die keine projektive Transformation ist und dennoch alle geforderten Bedingungen erfüllt. Geben Sie auch diese an.

c) Betten Sie die angegebenen reellen Punkte jetzt in den $\mathbb{RP}^2$ ein. Auch hier gibt es eine projektive Transformation, die die geforderten Eigenschaften aufweist. Überlegen Sie sich, wie sie diese bestimmen können.

LÖSUNG:

a) $\mathbb{CP}^1$ ist algebraisch eine Gerade. das bedeutet insbesondere, dass eine projektive Transformation durch drei Punkte und deren Bilder bereits eindeutig bestimmt ist. Kozirkularität bleibt dabei erhalten, und da sowohl Urbild- als auch Bildpunkte auf dem Einheitskreis liegen, wird der Einheitskreis wieder auf sich selbst abgebildet.

Das Verfahren, eine projektive Transformation durch vorgegebene Punktepaare zu definieren, wurde in Geometriekalküle eingeführt. Essentielle Grundidee ist es, die speziellen Punkte $A'' = (1,0)^T$, $B'' = (0,1)^T$ und $C'' = (1,1)^T$ als Zwischenschritt zu verwenden. Dazu benötigt man zwei projektive Transformationen:

$T_{a1}:$	$A'' \mapsto A$	$B'' \mapsto B$	$C'' \mapsto C$
$T_{a2}:$	$A'' \mapsto A'$	$B'' \mapsto B'$	$C'' \mapsto C'$

Dann ergibt sich die kombinierte Transformation, die A zunächst auf A'' und von da auf A' abbildet, als

$$T_a \sim T_{a2} \cdot T_{a1}^{-1} \sim T_{a2} \cdot T_{a1}^{\triangle}$$

Die Verwendung der Adjunkten Matrix macht die Rechnung etwas einfacher, weil man Divisionen vermeiden kann. Das Ergebnis unterscheidet sich nur durch einen skalaren Faktor.

Um eine der Teiltransformationen zu bestimmen, betrachtet man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnen A_1 und A_2 die Einträge des Koordinatenvektors in $\mathbb{CP}^1$. In diesem konkreten Fall, bei dem eine vorgegebene Zahl eingebettet wird, wird die zweite Koordinate typischer Weise immer 1 sein. Das Ergebnis dieses Gleichungssystems wird dann verwendet, um die Spalten der Matrix zu skalieren:

$$T_{a1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot A_1 & \lambda_2 \cdot B_1 \\ \lambda_1 \cdot A_2 & \lambda_2 \cdot B_2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix bildet A'' auf $\lambda_1 A$ ab, B'' auf $\lambda_2 B$ und C'' auf C. Da die skalaren Vielfachen den gleichen Punkt bezeichnen, ist dies die gesuchte Abbildung. Statt das Gleichungssystem direkt zu lösen, könnte man auch hier die Adjunkte der Matrix auf der linken Seite verwenden, und mit C multiplizieren. Die resultierende Matrix wäre ein Vielfaches der oben angegebenen. Die Matrix T_{a2} lässt sich ganz analog bestimmen, und dann wie oben angegeben zu T_a kombinieren.

b) Eine harmonische Abbildung, die nicht projektiv ist, muss den nicht-trivialen Körperautomorphismus in $\mathbb{C}$ einbeziehen, muss also an einer Stelle den Koordinatenvektor konjugieren.

Es wäre dabei praktisch, möglichst viel von Teilaufgabe a) wiederverwenden zu können. Dazu bräuchte man eine Abbildung, die Kozirkularität erhält (was sich aus der harmonischen Abbildung ergibt), aber Orientierung umkehrt (was der Konjugation entspricht), und außerdem die Punkte auf dem Einheitskreis fix lässt (um das Ergebnis aus a) nutzen zu können). All diese Bedingungen werden von der Inversion am Kreis erfüllt. Inversion am Kreis bildet einen Punkt P in der Ebene auf einen Punkt P' ab, so dass P, P' und der Kreismittelpunkt M auf einer Gerade liegen, und außerdem das Produkt der Abstände $|M,P| \cdot |M,P'| = r^2$ ist, wobei r hier den Radius des Kreises beschreibt. Für Zahlen in der komplexen Ebene und die Inversion am Einheitskreis bedeutet dies die folgende Abbildung:

$$re^{i\varphi} \mapsto \frac{1}{r}e^{i\varphi} \qquad z \mapsto \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung kann man einfach der in a) gefundenen vorausschalten und erhält damit die hier gesuchte Abbildung, ohne noch einmal ein Gleichungssystem lösen zu müssen. Alternativ könnte man natürlich auch A bis C zunächst konjugieren und dann die gesamten Berechnungen analog zu a) erneut ausführen.

c) In $\mathbb{RP}^2$ wird eine projektive Transformation durch *vier* Punkte und deren Bilder bestimmt. Der Kreis ist hier ein spezieller Kegelschnitt. Es mag verlockend erscheinen, beispielsweise den Punkt `I` als Fixpunkt der Abbildung anzunehmen. Dies ist jedoch unzulässig: Es stimmt zwar, dass sowohl `I` als auch sein Bild unter der Abbildung beide auf dem Einheitskreis liegen, aber das sagt noch nicht, dass dieser Punkt ein Fixpunkt sein muss.

Ein besserer Ansatz ist es hingegen, zu drei gegebenen Punkten den bezüglich des Kegelschnitts harmonischen vierten zu bestimmen. Um $(A, B; C, D)$ zu erhalten, legt man in A und B Tangenten an den Kegelschnitt an, schneidet diese mit einander, und verbindet diesen Schnittpunkt P mit C. Die so erhaltene Gerade schneidet den Kegelschnitt in einem weiteren, von C verschiedenen Punkt D.

Die Koordinaten für die Tangenten bzw. deren Schnittpunkt kann man sich aufgrund der einfachen Koordinaten der Punkte leicht überlegen. Man muss also eine Gerade, gegeben durch zwei Punkte P und C, mit dem Einheitskreis schneiden. Man sucht also einen Punkt $\lambda P + \mu C$, der die Kreisgleichung erfüllt. Das ist zunächst eine homogene quadratische Gleichung. Aber man kennt eine Lösung bereits, nämlich $\lambda = 0, \mu = 1$. Nimmt man $\lambda = 1$ an, so wäre der Punkt C genau derjenige, der sich für $\mu = \infty$ ergeben würde, was in den typischen Rechenverfahren raus fällt. Man setzt also $P + \mu C$ in die Kreisgleichung ein und wird, weil C auf dem Kreis liegt, eine *lineare* Gleichung in μ erhalten. Daraus ergeben sich rationale (und nach geeignetem Skalieren sogar ganzzahlige) Koordinaten für D.

Analoges Vorgehen ergibt auch einen Punkt D'. Wichtig ist es, dass die Reihenfolge der harmonischen Lage für Urbild und Bild die gleiche ist. In einem der beiden Fälle kann man die Koordinaten für den vierten Punkt aufgrund der Symmetrie durch Scharf-Drauf-Schauen bestimmen, aber in mindestens einer der Situationen wird wohl eine Berechnung in der eben dargestellten Art erforderlich sein.

— ***Hausaufgaben***—

Aufgabe 2. Kreisabbildungen (Fortsetzung)

Diese Aufgabe ist die Fortsetzung der vorangegangenen Präsenzaufgabe. Hier sollen die jeweils geforderten Abbildungen konkret berechnet werden.

d) Berechnen Sie die projektive Transformation in $\mathbb{CP}^1$.

e) Berechnen Sie die andere harmonische Abbildung in $\mathbb{CP}^1$.

f) Berechnen Sie die projektive Abbildung in $\mathbb{RP}^2$.

g) Wenden Sie alle drei Abbildungen an auf den Punkt

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Geben Sie das jeweilige Ergebnis wieder dehomogenisiert als Punkt in $\mathbb{R}^2$ an.

Versuchen Sie, so weit wie möglich durch Kopfrechnen zu kommen. Anschließend können Sie den Computer verwenden, um Ihre Berechnungen entweder abzuschließen oder zu überprüfen. Machen Sie in Ihrer Abgabe deutlich kenntlich, wie weit Sie mit Kopfrechnen gekommen sind.

LÖSUNG:

d) Zunächst sollte man sich noch mal explizit die in $\mathbb{CP}^1$ eingebetteten Koordinaten vergegenwärtigen.

$$A = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = A' \qquad B = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = B' \qquad C = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = C'$$

Jetzt kann man das in Verfahren aus a) anwenden.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & -1 \\ 0 & 1-i & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \frac{1+i}{2}\cdot\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & 1+i \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I}-i\cdot\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1+i \end{array}\right)$$

$$T_{a1} = \begin{pmatrix}1 & i\\1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-i & 0\\0 & 1+i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i & i-1\\-i & i+1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{II} \\ \mathrm{I}+i\cdot\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & i-1 & i+1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \frac{-i-1}{2}\cdot\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & -i \end{array}\right)$$

$$T_{a2} = \begin{pmatrix}-i & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1+i & 0\\0 & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-i & i\\1+i & -i\end{pmatrix}$$

$$T_a = T_{a2} \cdot T_{a1}^{\triangle} = \begin{pmatrix}1-i & i\\1+i & -i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-i & i-1\\-i & i+1\end{pmatrix}^{\triangle} = \begin{pmatrix}1-i & i\\1+i & -i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1+i & 1-i\\i & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1-2i\\1+2i & 1\end{pmatrix}$$

An dieser Stelle kann man überprüfen, dass die Abbildung das Geforderte leistet.

$$T_a \cdot A = \begin{pmatrix}1 & 1-2i\\1+2i & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-2i\\2+2i\end{pmatrix} = (2+2i)\cdot\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} \sim A'$$
$$T_a \cdot B = \begin{pmatrix}1 & 1-2i\\1+2i & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-i\\i-1\end{pmatrix} = (i-1)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \sim B'$$
$$T_a \cdot C = \begin{pmatrix}1 & 1-2i\\1+2i & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2i\\-2i\end{pmatrix} = (-2i)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \sim C'$$

e) Eine Kreisinversion lässt sich schreiben als

$$z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\bar{y}\\\bar{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$$

Führt man diese vor der projektiven Transformation aus, so lautet die gesamte Abbildung

$$T_b: \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1-2i & 1\\1 & 1+2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}\\\bar{y}\end{pmatrix}$$

f) Zunächst sollte man sich wieder die Abbildung veranschaulichen.

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = A' \qquad B = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = B' \qquad C = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = C'$$

Dann braucht man dazu jeweils noch einen harmonischen Punkt D, etwa mit $(A, C; B, D) = -1$. Das Verfahren ist in c) beschrieben.

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
D' &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ -1 \\ 1+\lambda \end{pmatrix} \\
0 &= (1-\lambda, -1, 1+\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ -1 \\ 1+\lambda \end{pmatrix} = \left(1 - 2\lambda + \lambda^2\right) + 1 - \left(1 + 2\lambda + \lambda^2\right) = 1 - 4\lambda \\
\lambda &= \frac{1}{4} \\
D' &= 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit kann man wieder die beiden Teile der Abbildung bestimmen.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} - \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} - \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} 1/2 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ 1/2 \cdot \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
T_{c1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} -\mathrm{II} \\ -\mathrm{I} \\ \mathrm{III} + \mathrm{I} + \mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} + 1/2 \cdot \mathrm{III} \\ 1/2 \cdot \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

$$
T_{c2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
T_c = T_{c2} \cdot T_{c1}^{\triangle} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{\triangle} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}
$$

Auch hier lohnt es sich, das Ergebnis zu überprüfen.

$$
\begin{aligned}
T_c \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim A' \\
T_c \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim B' \\
T_c \cdot C &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sim C' \\
T_c \cdot D &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \sim D'
\end{aligned}
$$

g) *Fehler:* Es ist etwas ungünstig, dass der Punkt hier D heißt, wenn es doch nahe liegt, den vierten Punkt in der vorangegangenen Teilaufgabe ebenfalls als D zu bezeichnen. Also bitte nicht verwirren lassen.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1-2i \\ 1+2i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 1+3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3-6i \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1-2i & 1 \\ 1 & 1+2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 3+3i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1-2i \\ 3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Dualer Partner

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie einige weitere Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Entscheiden Sie, welche der Matrizen B_i zusammen mit A ein zulässiges Primal-Dual-Paar bilden. Begründen Sie Ihre Antwort durch eine geeignete Rechnung.

b) Stellen Sie die primalen und dualen Kegelschnitte auch grafisch dar, sowohl für die gültigen Paare als auch für die Matrizen, die keinen gültigen Partner zu A darstellen.

c) Beschreiben Sie, welche Cayley-Klein-Geometrie sich aus den zulässigen Paaren jeweils ergibt.

<u>LÖSUNG:</u>

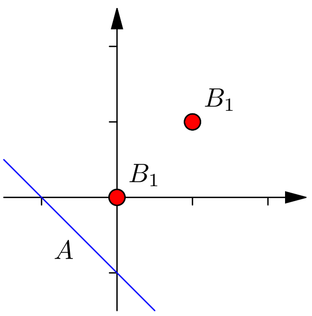
a) Die Matrix A hat Rang 1. Daher kann die zugehörige duale Matrix nicht direkt berechnet werden; es kommen mehrere Matrizen in Frage. (A, B) bilden genau dann ein zulässiges Primal-Dual-Paar, wenn $A \cdot B = \lambda \cdot E$ ist, wobei hier $\lambda = 0$ sein wird, da A kein Inverses hat.

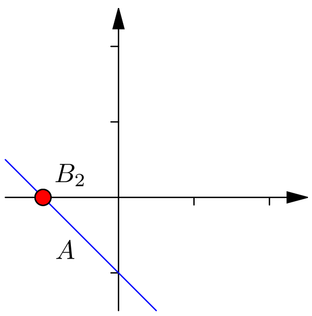
$$A \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

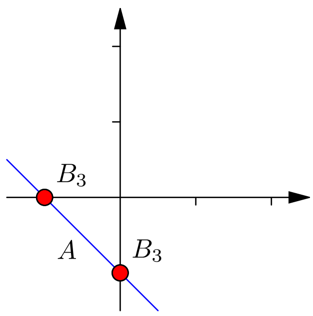
B_2 und B_3 stellen also gültige duale Matrizen zu A dar. B_4 hätte natürlich auch die Nullmatrix als Ergebnis, stellt aber keinen Kegelschnitt mehr dar und scheidet damit aus.

b) A repräsentiert als primale Matrix mit Rang 1 einen Kegelschnitt, der zu einer Doppelgeraden entartet. B_3 hat Rang 2 und entspricht damit zwei unterschiedlichen Punkten auf dieser Geraden. B_2 hat Rang 1 und und stellt deshalb einen Doppelpunkt dar. B_1 hat Rang zwei und stellt zwei Punkte dar, von denen keiner auf der Doppelgeraden liegt, weshalb (A, B_1) kein Primal-Dual-Paar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1,1,1) \qquad B_1 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1,1,1) \qquad B_2 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (-1,0,1) \qquad B_3 \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0,-1,1)$$







c) B_2 führt mit einem Doppelpunkt auf der Doppelgeraden zu galileischer Geometrie, in der sowohl die Entfernungs- als auch die Winkelmessung parabolisch sind.

B_3 führt mit zwei reellen Punkten auf der Doppelgeraden zu einer pseudoeuklidischen Geometrie mit euklidischer Entfernungsmessung und hyperbolischer Winkelmessung.

Aufgabe 4. Stark Degeneriert

a) Geben Sie sich einen degenerierten Kegelschnitt vor, bei dem sowohl primale als auch duale Matrix Rang 1 haben. Geben Sie die beiden Matrizen an, und zeichnen Sie den Kegelschnitt in ein Koordinatensystem ein.

b) Konstruieren Sie bezüglich der Cayley-Klein-Geometrie, die sich durch diesen Kegelschnitt ergibt, eine Folge von mindestens fünf äquidistanten Punkten auf einer beliebigen Geraden.

c) Konstruieren Sie durch einen beliebigen Punkt eine Büschel von mindestens fünf äquiangularen Geraden. Zwei aufeinanderfolgende Geraden des Büschels sollen also jeweils den gleichen Winkel mit einander einschließen.

<u>Lösung:</u>

Die Zeichnung, die all diese Schritte enthält, folgt nach der Besprechung der einzelnen Teilaufgaben.

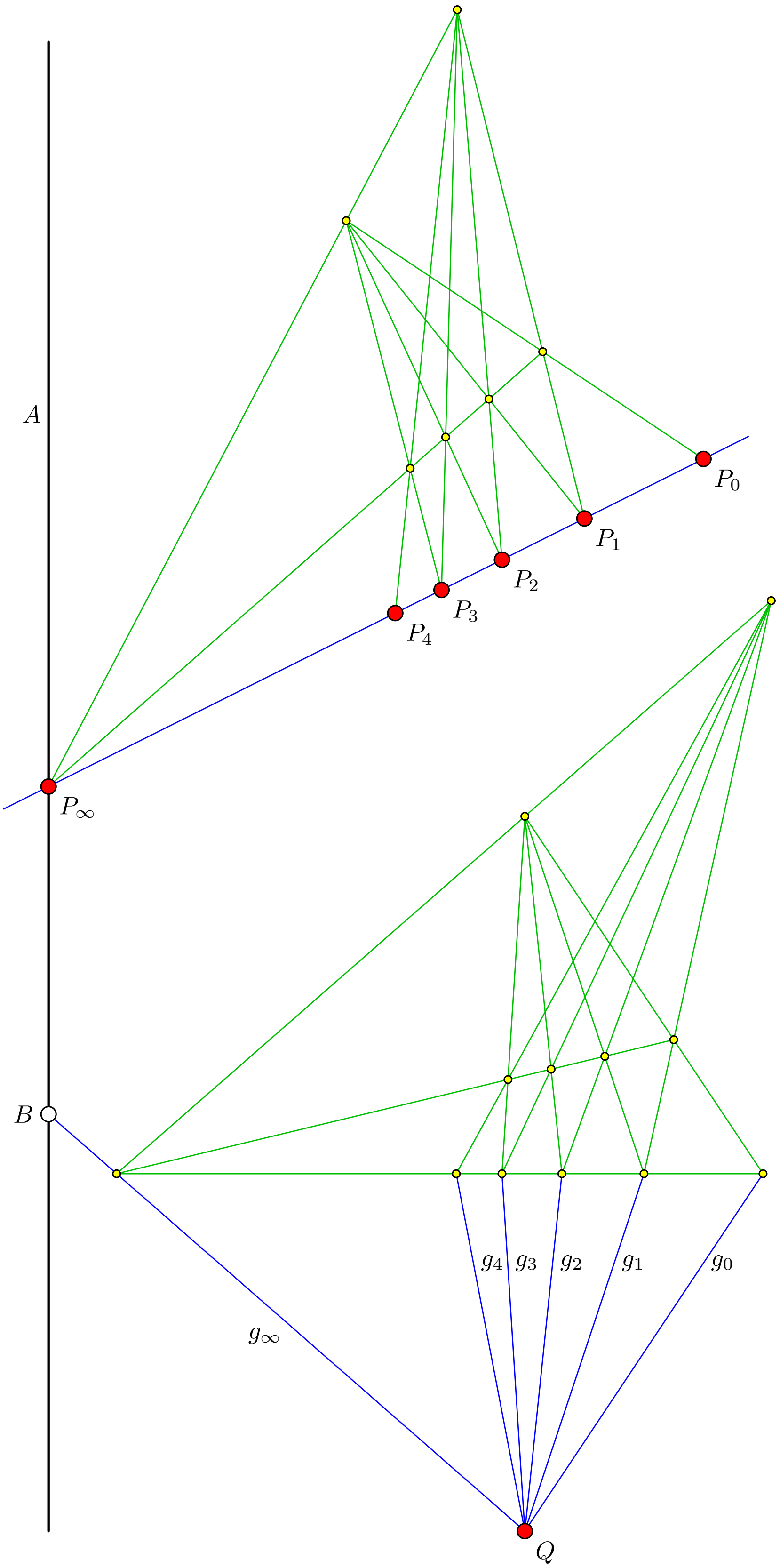
a) Da das Fundamentalgebilde eingezeichnet und in den folgenden beiden Aufgaben als Konstruktionselement verwendet werden soll, sollte es endlich gewählt werden. Eine mögliche Wahl ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dieser Kegelschnitt ist die y-Achse als Doppelgerade, auf der der Ursprung als Doppelpunkt liegt.

b) Die Konstruktion projektiver Skalen bzw. projektiv äquidistanter Punktefolgen, die aus Geometriekalküle bekannt ist, lässt sich wie gewohnt anwenden. Ausgangspunkt sind zwei Punkte P_0 und P_1 sowie der Fernpunkt P_∞, in dem deren Verbindungsgerade die Doppelgerade des Fundamentalgebildes scheidet.

c) Gibt man sich einen Punkt Q vor, so gibt es genau eine Tangente von Q an das Fundamentalgebilde, nämlich die Verbindung g_∞ zum Ursprung. Zeichnet man eine beliebige Gerade, die nicht durch Q verläuft, so kann man auf dieser den Schnittpunkt mit der Tangente als Fernpunkt benutzen, um eine Folge bezüglich dieses Punktes äquidistanter Punkte zu konstruieren. Aufeinanderfolgende Verbindungsgeraden g_i dieser Punkte mit Q haben gleiche Winkel, da die Tangente für euklidische Winkelmessung die Rolle des Fernpunkts für Längenmessung übernimmt, und da Doppelverhältnisse von Geraden den Doppelverhältnissen der Schnittpunkte entsprechen.


A
P_0
P_1
P_2
P_3
P_4
P_∞
B
g_4 g_3 g_2 g_1 g_0
g_∞
Q