Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Projektive Geometrie SS 2014

www-m10.ma.tum.de/ProjektiveGeometrieSS14

Lösungen zu Aufgabenblatt 7 (2. Juni 2014)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Basis-Kegelschnitte

In dieser Aufgabe soll eine geeignete projektive Basis gefunden werden für die Menge aller Kegelschnitte, die durch die folgenden vier Punkte gehen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) In der Schar aller Kegelschnitte durch diese vier Punkte gibt es drei entartete Kegelschnitte. Fertigen Sie zu jedem davon eine kleine Skizze an.

Hinweis: Bis einschließlich Teilaufgabe h) behandeln viele Teilaufgaben diese drei Kegelschnitte. Daher bietet sich eine dreispaltige Anordnung auf Ihrem Blatt an.

b) $\mathcal{K}_\lambda$ sei für $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definiert als der Kegelschnitt

$$\mathcal{K}_\lambda := \{E \mid (A, B; C, D)_E = \lambda\}$$

Ordnen Sie den drei degenerierten Kegelschnitten, die sie eben skizziert haben, bezüglich dieser Definition die Bezeichnungen $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_\infty$ zu.

Wenn Sie die Zuordnung nicht aus dem Stegreif treffen können, sehen Sie *nicht* in Ihrer Vorlesungsmitschrift nach, sondern überlegen Sie sich die Zuordnung über die Definition des Doppelverhältnisses, die Sie zu diesem Zweck am besten noch einmal notieren.

c) Weisen Sie nach, dass Ihre Zuordnung stimmt, dass sich also für Punkte E auf den drei Kegelschnitten jeweils wirklich das angegebene Doppelverhältnis ergibt.

d) Bestimmen Sie homogene Koordinaten für die in diesen degenerierten Kegelschnitten auftretenden Geraden.

e) Formulieren Sie exemplarisch für einen der drei degenertieren Kegelschnitte eine homogene quadratische Gleichung in den Variablen x, y und z.

f) Repräsentieren Sie jeden der drei degenerierten Kegelschnitte durch eine Matrix M_λ für $\lambda \in \{0, 1, \infty\}$.

g) Auf welche Weise dürfen Sie diese Matrizen verändern, ohne dass sich der dadurch beschriebene Kegelschnitt ändert?

h) Finden Sie mit Hilfe solcher Veränderungen drei geeignete Matrizen N_λ, die die gleichen Kegelschnitte $\mathcal{K}_\lambda$ beschreiben, aber zusätzlich auch die folgende Gleichung erfüllen:

$$N_1 = N_0 + N_\infty$$

i) Begründen Sie kurz, weshalb jede Linearkombination $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$ mit

$$N_{\alpha,\beta} := \alpha N_\infty + \beta N_0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

einen Kegelschnitt durch die vier Punkte A, B, C, D darstellt.

j) Stellen Sie eine Vermutung an, wie man mit dieser Vorarbeit zu jedem beliebigen vorgegebenen Doppelverhältnis λ eine Matrix für den entsprechenden Kegelschnitt $\mathcal{K}_\lambda$ bestimmen kann. Sie müssen diese Vermutung (noch) nicht beweisen; die weiteren Teilaufgaben werden sich diesem Beweis widmen.

k) Für jeden der vier vorgegebenen Punkte, also für $P \in \{A, B, C, D\}$, sei $t_{\lambda,P}$ die Tangente an $\mathcal{K}_\lambda$ im Punkt P. Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis

$$\mu(\mathcal{K}_\lambda) := (t_{0,P}, t_{\infty,P}; t_{\lambda,P}, t_{1,P})$$

unabhängig von der Wahl von P ist.

l) Beweisen Sie die Gleichung

$$\mu(\mathcal{K}_{\alpha,\beta}) = \frac{\alpha}{\beta}$$

für die in Teilaufgabe i) angegebenen Linearkombinationen $\alpha N_\infty + \beta N_0$.

m) Beweisen Sie, dass $\mu(K_\lambda) = \lambda$ gilt.

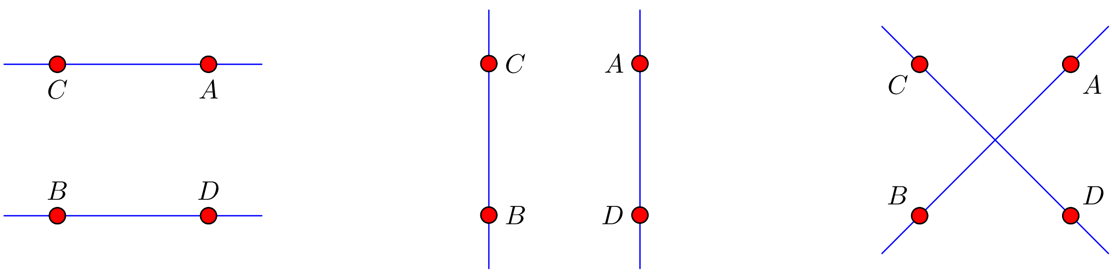
Hinweis: Betrachten Sie den Grenzübergang $E \to P$ für den in der Definition von $\mathcal{K}_\lambda$ verwendeten Laufpunkt E. Wählen Sie P geschickt.

n) Bestimmen Sie den Kegelschnitt $\mathcal{K}_{-1}$ aller Punkte, die zu den Punkten A bis D harmonische Verbindungsgeraden haben, und versuchen Sie, diesen geometrisch zu interpretieren und zu skizzieren.

o) Betrachten Sie jetzt allgemein vier Kegelschnitte, die sich in genau vier Punkten schneiden, auch wenn diese Punkte nicht mehr unbedingt die A bis D aus der Aufgabenstellung sind. Begründen Sie, weshalb das Doppelverhältnis der Tangenten an den gemeinsamen Schnittpunkten immernoch unabhängig von der Wahl des konkreten Schnittpunkts ist.

<u>Lösung:</u>

a) Die Degenerierten Kegelschnitte sind all die Kombinationen von je zwei Geraden, auf denen zusammen alle vier Punkte liegen:



b) Für 0 und ∞ sieht man schnell eine Determinante im Doppelverhältnis, die für Punkte auf dem jeweiligen Kegelschnitt aufgrund der Kollinearität Null wird.

$\mathcal{K}_0$ $\qquad$ $\mathcal{K}_\infty$ $\qquad$ $\mathcal{K}_1$

c)

$$E = \alpha A + \beta C \qquad E = \alpha A + \beta D \qquad E = \alpha A + \beta B$$

$$0 = \frac{\overbrace{[ACE]}^{=0}[BDE]}{[ADE][BCE]} \qquad \infty = \frac{[ACE][BDE]}{\underbrace{[ADE]}_{=0}[BCE]} \qquad 1 = \frac{\beta[ACB] \cdot \alpha[BDA]}{\beta[ADB] \cdot \alpha[BCA]}$$

$$E = \alpha B + \beta D \qquad E = \alpha B + \beta C \qquad E = \alpha C + \beta D$$

$$0 = \frac{[ACE]\overbrace{[BDE]}^{=0}}{[ADE][BCE]} \qquad \infty = \frac{[ACE][BDE]}{[ADE]\underbrace{[BCE]}_{=0}} \qquad 1 = \frac{\beta[ACD] \cdot \alpha[BDC]}{\alpha[ADC] \cdot \beta[BCD]}$$

d) Man kann entweder Kreuzprodukte ausrechnen, oder sich die Geradengleichungen im Kopf überlegen und als Parametervektor aufschreiben.

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

e) Es werden einfach die durch die Parametervektoren ausgedrückten Gleichungen multipliziert.

$$0 = (y+z)(y-z) = y^2 - z^2 \qquad 0 = (x+z)(x-z) = x^2 - z^2 \qquad 0 = (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

f) Direkt aus den quadratischen Gleichungen ergeben sich die folgenden Diagonalmatrizen:

$$M_0 = \begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix} \qquad M_\infty = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{pmatrix} \qquad M_1 = \begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

Alternativ kann man auch Matrizen aus der Multiplikation der Geradenvektoren erhalten:

$$M_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot (0,1,-1) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad M_\infty = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot (1,0,-1) = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad M_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot (1,-1,0) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Die Zeilen dieser Rang-1-Matrizen sind jeweils Repräsentanten der einen Geraden, die Spalten Repräsentanten der anderen.

g) Man kann eine antisymmetrische Matrix addieren sowie die gesamte Matrix mit einem (von Null verschiedenen) Skalar multiplizieren, ohne den durch die Matrix beschriebenen Kegelschnitt dadurch zu verändern. In diesem Sinne sind auch die verschiedenen Ergebnisse der letzten Teilaufgabe äquivalent.

h) Ein mögliches Ergebnis:

$$N_0 = \begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & 1\end{pmatrix} \qquad N_\infty = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{pmatrix} \qquad N_1 = \begin{pmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

i) Die Gleichung $p^T \cdot N_{\alpha,\beta} \cdot p = 0$ drückt aus, dass ein Punkt p auf einem durch die Matrix $N_{\alpha,\beta}$ beschriebenen Kegelschnitt liegt. Die Beschreibung dieser Matrix als Linearkombination lässt sich mittels Distributivität rausziehen. Ist p einer der gemeinsamen Schnittpunkte, so sind die einzelnen Teile jeweils Null:

$$p^T \cdot (\alpha N_\infty + \beta N_0) \cdot p = \alpha \cdot \underbrace{p^T N_\infty p}_{=0} + \beta \cdot \underbrace{p^T N_0 p}_{=0} = 0$$

j) Die Idee ist, dass sich die Schar der Kegelschnitte als projektive Gerade auffassen lässt. In diesem Fall könnte man die Matrizen N_∞ und N_0 als die Einheitsvektoren auf dieser Geraden interpretieren. Dass zumindest N_1 mit dieser Interpretation kompatibel ist, wurde in Teilaufgabe h) sichergestellt.

$$N_0 \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad N_\infty \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad N_1 \mathrel{\hat=} \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

In diesem Falle könnte man einen Punkt $(\lambda, 1)^T$, der zur Standardbasis ein Doppelverhältnis λ hat, erhalten als $\lambda \cdot N_\infty + 1 \cdot N_0$.

k) Die Kegelschnitte sind symmetrisch bezüglich Spiegelungen an den Koordinatenachsen, und somit auch Punktsymmetrisch bezüglich des Ursprungs. Dies sieht man direkt an der Symmetrie des Doppelverhältnisses, dessen Wert sich unter Permutationen der Kleinschen Vierergruppe nicht ändert. Jede dieser Permutationen entspricht einer der Symmetrien des Kegelschnitts.

Wendet man eine dieser Permuationen auf das Doppelverhältnis an, so ergibt sich dadurch eine andere Beschriftung der Punkte. Führt man die Beschriftung durch die zugehörige Symmetrieoperation, die eine spezielle projektive Transformation ist, wieder auf die usrprüngliche Lage zurück, so wird durch diese Operation der Punkt E auf sein symmetrisches Bild E' abgebildet. Zu jedem E auf dem Kegelschnitt liegen also auch die entsprechenden symmetrischen Punkte auf dem gleichen Kegelschnitt.

Für die Tangenten gilt die gleiche Symmetrie. Deswegen ist die Lage der vier Tangenten zu einander in jedem der vier Punkte symmetrisch, also bis auf eine projektive Transformation gleich, also ist das Doppelverhältnis jeweils gleich.

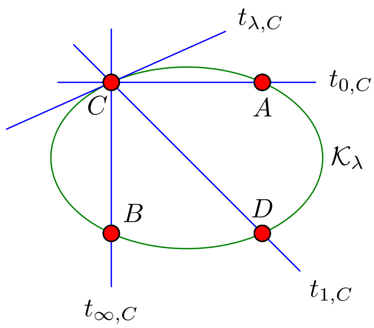
l) Die Tangente an einen Punkt P eines durch die Matrix $N_{\alpha,\beta}$ beschriebenen Kegelschnitts erhält man durch Multiplikation des Vektors mit dieser Matrix:

$$\begin{aligned}
N_{\alpha,\beta} \cdot P &= \alpha \cdot N_\infty \cdot P + \beta \cdot N_0 \cdot P = \alpha \cdot t_{\infty,P} + \beta \cdot t_{0,P} \\
t_{1,P} &= N_1 \cdot P = (N_\infty + N_0) \cdot P = N_{1,1} \cdot P = t_{\infty,P} + t_{0,P} \\
\mu\left(N_{\alpha,\beta}\right) &= \left(t_{0,P}\ ,\ t_{\infty,P}\ ;\ t_{(\alpha,\beta),P}\ ,\ t_{1,P}\right) \\
&= \left(t_{0,P}\ ,\ t_{\infty,P}\ ;\ \alpha \cdot t_{\infty,P} + \beta \cdot t_{0,P}\ ,\ t_{\infty,P} + t_{0,P}\right) \\
&= \left(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}$$

Hier wird ausgenutzt, dass die Schar der Geraden durch p aufgrund der Dualität eine projektive Gerade bilden, auf der eine Basis beliebig gewählt werden kann, um das Doppelverhältnis auszurechnen.

m) Man kann das Doppelverhältnis der Tangenten mit dem der Punkte vergleichen:

$$\begin{array}{c}
\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\\beta\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right) \\
(\ A\ ,\ B\ ;\ C\ ,\ D\ )
\end{array}$$



Man stellt fest, dass A die Rolle von 0 spielt, B die von ∞ und D die von 1. C stellt quasi den variablen Punkt dar und hat als solches eine Sonderrolle, da es nicht Teil der projektiven Basis ist. Es empfiehlt sich daher, $P = C$ anzunehmen und den Grenzfall zu betrachten, dass E gegen C läuft.
Das Doppelverhältnis $(A, B; C, D)_E$ ist damit im Allgemeinen nicht mehr definiert. Statt dem Doppelverhältnis der vier Punkte kann man aber auch das Doppelverhältnis der vier Verbindungsgeraden mit E betrachten. Im Grenzübergang $E \to C$ wird eine der Verbindungsgeraden zu einer Tangente.

Die anderen drei Verbindungsgeraden bleiben für den allgemeinen Kegelschnitt $\mathcal{K}_\lambda$ Verbindungsgeraden. Man kann diese Verbindungsgeraden jedoch auch auffassen als Tangenten an die speziellen Kegelschnitte $\mathcal{K}_0$, $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_\infty$. Es ergibt sich folgende Entsprechung für $E \to C$:

$$E \vee A \to t_{0,C} \qquad E \vee B \to t_{\infty,C} \qquad E \vee C \to t_{\lambda,C} \qquad E \vee D \to t_{1,C}$$

$$\lambda = (A, B; C, D)_E = (E \vee A\ ,\ E \vee B\ ;\ E \vee C\ ,\ E \vee D) \overset{E \to C}{=} (t_{0,C}\ ,\ t_{\infty,C}\ ;\ t_{\lambda,C}\ ,\ t_{1,C}) = \mu(\mathcal{K}_\lambda)$$

n) Die Vermutung aus Teilaufgabe j) hat sich also bestätigt: Wählt man $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$, so hat der Kegelschnitt $\mathcal{K}_{\alpha,\beta}$, der sich als Linearkombination ergibt, genau das erhoffte Doppelverhältnis λ bezülich der Punkte A bis D.

Konkret ergibt sich N_{-1} mit $\alpha = -1, \beta = 1$:

$$N_{-1} = N_0 - N_\infty = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$
$$x^2 + y^2 = 2z^2$$

Dieser Kegelschnitt beschreibt in Standardeinbettung ($z = 1$) einen Kreis um den Ursprung mit Radius $\sqrt{2}$.

o) Die Betrachtung des Doppelverhältnisses der Tangenten ist immer unabhängig vom gewählten Schnittpunkt. Diese Aussage gilt unabhängig von der speziellen Lage von A bis D, da man durch eine projektive Transformation jeden Einzelfall auf diesen Spezialfall zurückführen kann, so dass die Argumentation von Teilaufgabe k) greift.

— ***Hausaufgaben***—

Aufgabe 2. Verallgemeinerung von Quadrilateral Sets

Gegeben sei ein konvexes n-Eck mit Eckpunkten c_1 bis c_n sowie eine Gerade l, die das n-Eck nicht schneidet. Für $1 \leq i \leq n$ ergeben sich Punkte a_i durch senkrechte Projektion der c_i auf l, sowie Punkte b_i als Schnittpunkte der verlängerten Polygonkante $c_i \vee c_{i+1}$ mit l. Alle Indizes in dieser Aufgabe sind modulo n zu verstehen.

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass auf l die folgende Gleichung gilt:

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \prod_{i=1}^{n} [a_{i+1}, b_i]$$

a) Machen Sie sich für $n = 5$ eine Skizze.

b) In welchem Sinne ist diese Aufgabe eine Verallgemeinerung von Quadrilateral Sets? Für welches n entspricht die Situation am ehesten der eines Quadrilateral Sets? Machen Sie sich auch davon eine Skizze.

c) Wählen Sie geeignete Koordinaten, so dass die Punkte c_i klar als um eine Höhe h_i geliftete Versionen der a_i erkennbar sind.

d) Überlegen Sie sich, welche kollinearen Punktetripel sich aus der Konstruktion ergeben, und drücken Sie diese in den von Ihnen gewählten Koordinaten aus.

e) Formen Sie die Gleichungen, die sich aus den Kollinearitäten ergeben, so um, dass darin die Höhen sowie Determinanten in homogenen Koordinaten auf der Geraden l auftauchen.

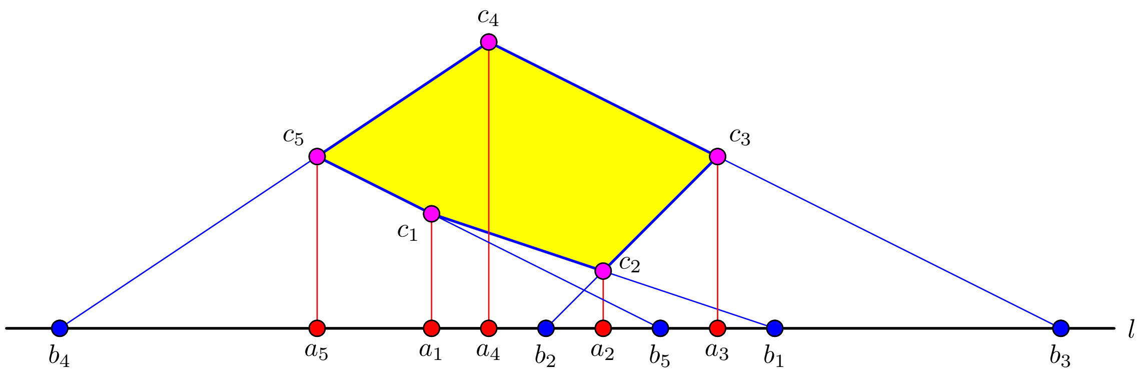
f) Kombinieren Sie diese Gleichungen geeignet, um das angekündigte Endresultat zu erhalten:

$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \prod_{i=1}^{n} [a_{i+1}, b_i]$$

g) Überlegen Sie, unter welchen Einschränkungen der Umkehrschluss gilt, dass also aus dieser einen Gleichung die Liftbarkeit der Punkte zu einem n-Eck folgt.

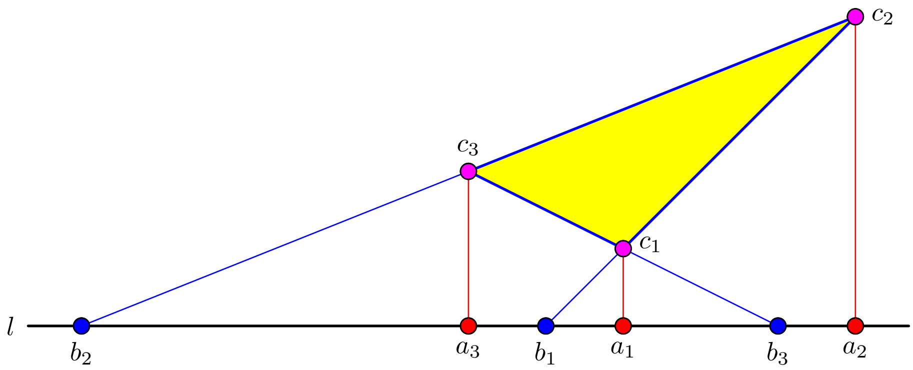
<u>Lösung:</u>

a) Für $n = 5$ ergibt sich beispielsweise folgende Skizze:

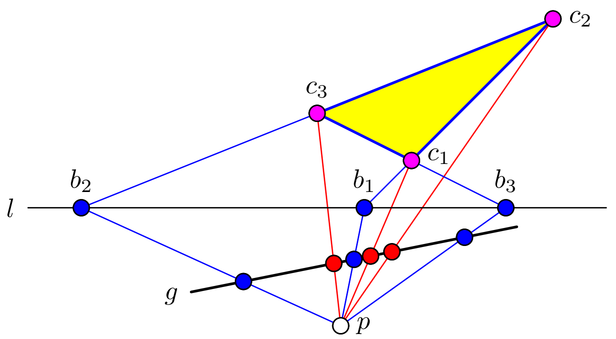


b) Für $n = 3$ ergibt sich eine spezielle Situation eines Quadrilateral Sets. Algebraisch erhält man genau diejenige multihomogenen Bracket-Gleichung, die ein Quadrilateral Set $(a_1, b_2; a_2, b_3; a_3, b_1)$ charakterisiert.

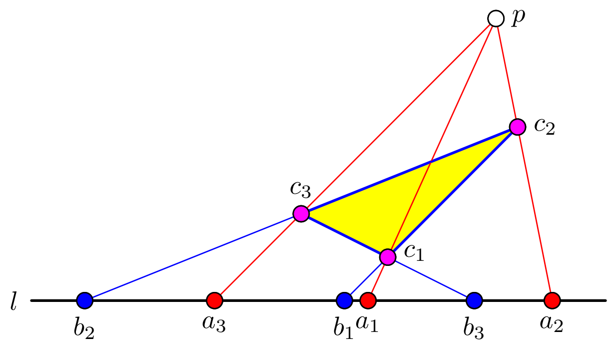
Die Konstruktion drum herum kann man als Spezialfall der üblichen Nachweiskonfiguration für ein Quadrilateral Set ansehen, und zwar entweder als Spezialfall der primalen oder der dualen Nachweis-Konfiguration. Als Spezialfall der primalen Konfiguration (mit vier Geraden und deren sechs Schnittpunkten) erhält man die angegebene Situation genau dann, wenn die Gerade l sowohl eine der vier Geraden der Nachweis-Konstruktion als auch die Rechengerade g ist, und außerdem der Projektionspunkt p im Unendlichen senkrecht zu l liegt. Als Spezialfall der dualen Konfiguration (mit vier Punkten und deren sechs Verbindungsgeraden) ergibt sich die angegebene Situation, wenn p, einer dieser vier Punkte, ins Unendliche senkrecht zu l geschoben wird. Die folgenden Skizzen illustrieren diesen Zusammenhang.



$n = 3$: Sonderfall eines QuadSet-Nachweises



Nachweis allgemein primal



Nachweis allgemein dual

In diesem Sinne ist die beschriebene Konfiguration für $n = 3$ ein Sonderfall der QuadSet-Nachweiskonfiguration. Da die QuadSet-Relation jedoch von der speziellen Lage ihrer Nachweiskonfiguration unabhängig ist, ließe sich zu jedem QuadSet ein Nachweis mit einem dieser Spezialfälle erbringen. Die Relation der Punkte a_i und b_i ist daher ganz allgemein eine QuadSet-Relation, und nicht nur ein Spezialfall davon. Für $n > 3$ ergibt sich so eine Verallgemeinerung der QuadSet-Relation.

c) O.B.d.A. seien alle Punkte endlich und l die Gerade $(0, 1, 0)^T$. Dann kann man wiederum o.B.d.A. für die Punkte folgende Repräsentanten wählen:

$$b_i = \begin{pmatrix} t_i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a_i = \begin{pmatrix} s_i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_i = \begin{pmatrix} s_i \\ h_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Auf jeder Kante des n-Ecks liegen drei Punkte, was die folgenden n Kollinearitäten bedingt:

$$[b_i, c_i, c_{i+1}] = 0 \quad 1 \leq i \leq n$$

e) Die Höhen kann man aus den Determinanten ziehen, indem man diese nach der entsprechenden Zeile entwickelt.

$$0 = [b_i, c_i, c_{i+1}] = \begin{vmatrix} t_i & s_i & s_{i+1} \\ 0 & h_i & h_{i+1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = h_i \cdot \begin{vmatrix} t_i & s_{i+1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - h_{i+1} \cdot \begin{vmatrix} t_i & s_i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = h_i \cdot [b_i, a_{i+1}] - h_{i+1} \cdot [b_i, a_i]$$

$$h_{i+1} \cdot [a_i, b_i] = h_i \cdot [a_{i+1}, b_i]$$

Die 2×2-Determinanten in der Rechnung sind bezüglich der Basis $(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T$ zu verstehen, die die Rechengerade l aufspannt. Die darin genannten Einträge sind also zweielementige homogene Koordinaten auf der Geraden bezüglich dieser Basis, nicht mehr die ursprünglichen dreielementigen Repräsentanten der Punkte. Da die Gleichung im Endergebnis multihomogen und somit projektiv invariant ist, spielt die konkrete Wahl der Basis eine untergeordnete Rolle.

f) Multipliziert man all diese Gleichungen auf, so kann man anschließend die h_i kürzen, da aufgrund der zyklischen Indizierung jede Höhe auf jeder Seite der Gleichung genau ein mal auftritt, und erhält genau die angegebene Gleichung.

$$\prod_{i=1}^{n} h_{i+1} \cdot [a_i, b_i] = \prod_{i=1}^{n} h_i \cdot [a_{i+1}, b_i]$$
$$\left(\prod_{i=1}^{n} h_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} h_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} [a_{i+1}, b_i]\right)$$
$$\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = \prod_{i=1}^{n} [a_{i+1}, b_i]$$

g) Die Umformung der Gleichung in Teilaufgabe e) ist komplett umkehrbar. Jede einzelne dieser Gleichungen ist also sowohl notwending als auch hinreichend für eine Kollinearität der drei durch sie beschriebenen Punkte.

Man kann einen der Punkte a_i auf eine beliebige Höhe $h_i \neq 0$ liften, um das entsprechende c_i zu erhalten. Die Höhen h_{i+1} und h_{i-1} ergeben sich durch die in der Konstruktion geforderten Kollinearitäten, so dass die entsprechenden Teilgleichungen automatisch erfüllt sind. In diesem Sinne ergeben sich alle c_i aus je einem ihrer Nachbarn. Irgendwann schließt sich der Kreis, und man bekommt zwei Punkte c_i und c_{i+1}, deren Position bereits durch die jeweils anderen Nachbarn festgelegt ist, die jedoch zusätzlich noch mit b_i kollinear sein müssen, damit die Konstruktion aufgeht.

In Gleichungen ausgedrückt geht es also um die Frage, ob die letzte Gleichung sich automatisch ergibt, wenn alle anderen Gleichungen sowie ihr Produkt erfüllt ist. Wenn die beiden Seiten aller Gleichungen von Null verschieden sind, dann kann man diese einfach aus dem Produkt kürzen, um am Ende die letzte verbleibende Gleichung übrig zu behalten.

Ausschließen muss man also all diejenigen Situationen, in denen beide Seiten einer Gleichung Null werden. Dafür gibt es drei Möglichkeiten. Entweder, die beiden involvierten Determinanten werden Null. Dann ist $a_i = b_i = a_{i+1}$, es fallen also drei (in gewissem Sinne aufeinanderfolgende) Punkte zusammen. Oder eine Determinante und eine Höhe ist Null. Dann fallen immernoch zwei Punkte zusammen. Oder beide Höhen sind Null. Dann muss es irgendwo eine Gleichung geben, bei der eine Höhe und eine Determinante Null ist, da andernfalls alle Höhen Null wären, und das triviale Lifting durch die Wahl der ersten Höhe ausgeschlossen ist.

Man kann also sagen, dass die Konfiguration immer dann liftbar ist, wenn die große Produktgleichung gilt, und zusätzlich jede darin vorkommende Determinante von Null verschieden ist.